

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського »

Математичне моделювання систем і процесів  
Конспект лекцій  
для студентів спеціальності 153  
«Мікро- та наносистемна техніка»  
спеціалізації «Електронні біомедичні системи і технології»  
«Інформаційні технології проектування в електроніці та наносистемах»

Київ 2018

Навчальне видання

Математичне моделювання систем і процесів

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 153

«Мікро- та наносистемна техніка»

спеціалізації «Електронні біомедичні системи і технології»

«Інформаційні технології проектування в електроніці та наносистемах»

Укладач

*Лошицький Павло Павлович*, проф.

Відповідальний редактор

*В.І. Тимофєєв*, проф.

Рецензент

*Т.Л.Волхова* , доц

## Передмова

У конспекті лекцій «Математичне моделювання систем та процесів» розглядаються розділи пов'язані як з побудовою математичних моделей динамічних систем, так і з лінійними та нелінійними хвильовими процесами. Ці розділи є основними частинами для розкриття змісту цього курсу. Всі лекції складаються з наступних частин: теоретичні відомості та приклади з розв'язками.

Метою даного курсу є вивчення, повторення та закріплення теоретичних знань, вивчення методів розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь, отримання навиків роботи з математичними моделями.

При розробці курсу лекцій використовувалась література:

1. Асанов А.З. Моделирование и анализ динамических систем: Учебное пособие. – Набережные Челны : Изд – во Камского гос. Политехнического института, 2004, – 152 с. ISBN 5 – 9538 – 0032 – 1.
2. Аполлонский С.М. Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике. – СПб.: Питер.2012. – 352 с.: ил. ISBN 978 – 5 – 496 - 00046 – 8.
3. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие./ Под ред.П.В.Трусова. – м.: Логос.2005. – 440 с.ISBN 5 – 98704 – 037 – X.
4. Козин Р.Г. Математическое моделирование: примеры решения задач: Учебно – методическое пособие. – М.: НИЯУ МИФИ. 2010. – 176 с. ISBN 978 – 5 – 7262 – 1242 – 5.
5. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. – Саратов : Гос.УНЦ «Коледж». 2005.– 320 с. ISBN 5 -94409 – 045 – 6.
6. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. Изд.3-е, исправленное. – М.: Ком.Книга.2007. – 192 с. ISBN 978 – 5 – 485 -90953 – 4.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	10
1. МЕТОДОЛОГІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ .....	11
1.1 Поняття системи .....	11
1.2 Етапи системного аналізу .....	14
1.3 Матеріал для повторення .....	21
1.3.1 Рівняння з відокремлюваними.....	21
1.3.2 Геометричні та фізичні задачі, які приводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними .....	23
1.3.3 Завдання .....	26
2. ЕЛЕМЕНТАРНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ.....	27
2.1 Фундаментальні закони природи. ....	27
2.2 Ієрархічний метод отримання моделей.....	34
2.3 Матеріал для повторення .....	37
2.3.1 Однорідні рівняння .....	37
2.3.2 Завдання .....	38
3. ЕЛЕМЕНТАРНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ.....	39
3.1 Варіаційні принципи.....	39
3.2 Застосування аналогії при побудові моделей. ....	42
3.3 Про нелінійності математичних моделей.....	45
3.4 Попередні висновки .....	47
3.5 Лінійні рівняння першого порядку .....	49

3.6 Завдання .....	50
4. ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ .....	51
4.1 Схема застосування математики .....	51
4.2 Множинність та єдність моделей.....	52
4.3 Вимога адекватності .....	54
4.4 Вимоги достатньої простоти.....	56
4.5 Деякі інші вимоги.....	57
4.6 Матеріали для повторення .....	59
4.6.1 Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник.....	59
4.6.2 Завдання .....	61
5.ТИПИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	62
5.1 Структурні та функціональні моделі. ....	62
5.2 Дискретні і неперервні моделі .....	64
5.3 Лінійні та нелінійні моделі.....	67
5.4 Деякі моделі простих нелінійних об'єктів .....	69
5.4.1 Історія виникнення не лінійності. ....	69
5.4.2 Три режими в нелінійній моделі популяції.....	70
5.4.3 Вплив сильної нелінійності на процес коливань.....	72
5.5 Лінеаризація.....	73
5.6 Детерміновані та ймовірнісні моделі. Інші типи моделей .....	77
5.7 Матеріали для повторення .....	79
5.7.1 Рівняння, що не розв'язуються відносно похідної.....	79

5.7.2 Завдання .....	82
6. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ .....	83
6.1 Про змістовну модель .....	83
6.2 Формулювання математичної задачі. Задачі аналізу та синтезу .....	85
6.3 Визначальні співвідношення .....	87
6.4 Підбір емпіричних формул .....	89
6.5 Про розмірності величин .....	93
6.6 Подібність об'єктів .....	94
6.7 Матеріали для повторення .....	98
6.7.1 Рівняння які допускають зниження порядку .....	98
6.7.2 Завдання .....	100
7. ОСНОВНІ ТИПИ РІВНЯНЬ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В ЯКОСТІ КОМПОНЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ .....	101
7.1 Кінцеве рівняння .....	101
7.2 Рівняння для функцій одного аргументу .....	105
7.3 Рівняння для функцій декількох аргументів .....	110
7.4. Матеріали для повторення .....	114
7.4.1 Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами .....	114
7.4.2 Завдання .....	120
8. ОСНОВНІ ТИПИ РІВНЯНЬ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В ЯКОСТІ КОМПОНЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ .....	121
8.1 Задачі на екстремум зі скінченним числом степенів свободи .....	121
8.2 Задачі на екстремум з шуканою функцією .....	125

8.3 Про застосування математичного аналізу .....	129
8.4 Матеріали для повторення .....	131
8.4.1 Лінійні рівняння з змінними коефіцієнтами .....	131
8.4.2 Завдання .....	133
9. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ .....	135
9.1 Методи побудови і дослідження рішень .....	135
9.2 Асимптотичний розклад.....	138
9.3 Інтегральне представлення розв'язків .....	142
9.4 Автомодельні розв'язання.....	145
9.5 Матеріали для повторення .....	149
9.5.1 Крайові задачі.....	149
9.5.2 Завдання .....	150
10. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ .....	152
10.1 Розв'язок типу біжучої та стоячої хвиль .....	152
10.2 Фазовий портрет.....	156
10.3 Узагальнені розв'язання .....	160
10.4 Вибір степені точності розв'язання.....	163
10.5 З'ясування точності розв'язання .....	164
10.6 Особливості процесу розв'язання змістовних задач .....	166
10.7 Про застосування ЕОМ .....	168
10.8 Матеріали для повторення .....	170
10.8.1 Лінійні системи з постійними коефіцієнтами.....	170

10.8.2 Завдання .....	177
11. МОДЕЛІ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ З ЧАСТКОВИМИ ПОХІДНИМИ.....	179
11.1 Потік частинок в трубці.....	179
11.2 Гравітаційний режим потоку ґрунтових вод.....	183
11.3 Баланс маси в елементі ґрунту.....	184
11.4 Замикання закону збереження маси.....	187
11.5 Про деякі властивості рівняння Бусінеска .....	188
11.6 Матеріали для повторення .....	194
11.6.1 Рівняння в часткових похідних першого порядку.....	194
11.6.2 Завдання .....	197
12. МЕТОДИ САМОКОНТРОЛЮ.....	199
12.1 Прикидки.....	199
12.2 Контроль розмірності.....	200
12.3 Інші види контролю .....	202
12.4 Роль прикладів.....	205
12.5 Про верифікації моделі.....	208
12.6 Поширені помилки.....	211
12.6.1 Помилки у виборі моделі .....	211
12.6.2 Вплив інтерполяції та екстраполяції.....	212
12.6.3 Помилки у виборі методу дослідження.....	215
12.7 Матеріали для повторення.....	217
13. РОЗВ'ЯЗКИ.....	221



13.1 Розв'язки до розділу 1 .....	221
13.2 Розв'язки до розділу 2 .....	222
13.3 Розв'язки до розділу 3 .....	225
13.4 Розв'язки до розділу 4 .....	229
13.5 Розв'язки до розділу 5 .....	231
13.6 Розв'язки до розділу 6 .....	234
13.7 Розв'язки до розділу 7 .....	239
13.8 Розв'язки до розділу 8 .....	243
13.9 Розв'язки до розділу 9 .....	249
13.10 Розв'язки до розділу 10 .....	252
13.11 Розв'язки до розділу 11 .....	258

## ВСТУП

Математичне моделювання - дослідження реальних явищ або поведінки об'єктів за допомогою математичних моделей. Математичне моделювання сформувалося в окрему міждисциплінарну галузь знань з властивою їй об'єктами, підходами і методами досліджень. До математичного моделювання вдаються в тих випадках, коли явище або об'єкт такі, що їх натурні дослідження неможливі, коли реальні дослідження занадто дорогі, працезатратні або взагалі неможливі.

Процес математичного моделювання розпадається на кілька етапів:

- формулювання завдання дослідження;
- формалізація завдання - побудова математичної моделі явища або об'єкта;
- узагальнення математичної задачі шляхом приведення її до безрозмірного вигляду;
- перевірка адекватності побудованої моделі реальним прототипам.

У конспекті лекцій особливості реалізації зазначених етапів ілюструються на прикладах розв'язання конкретних завдань, що відносяться до різних областей знань, причому, починаючи з найпростіших моделей. Спеціаліст в області моделювання, повинен володіти широкими і глибокими знаннями не тільки в багатьох розділах математики, а й аналогічними знаннями, які відносяться до об'єкта моделювання в природно-наукових дисциплінах. Тільки досконале знання об'єкта моделювання, відповідної предметної області, дозволяє сподіватися на успішну реалізацію математичної моделі процесу або явища.

# 1. МЕТОДОЛОГІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.

## СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

При дослідженні деякої сукупності властивостей реального об'єкта за допомогою математики, вибирається (будується) «математичний об'єкт» - система рівнянь, арифметичних співвідношень, геометричних фігур, або комбінація одного і другого і т. д., дослідження якої математичними методами і повинно відповісти на поставлені запитання про властивості реального об'єкта. Цей «математичний об'єкт» називається моделлю реального об'єкта відносно сукупності його властивостей.

Побудова і дослідження математичних моделей, створення обчислювальних алгоритмів і програм, які реалізують ці алгоритми називаються математичним моделюванням.

### 1.1 Поняття системи

Базовим поняттям математичного моделювання є поняття *системи*. Система в широкому змісті – еквівалент поняття математичної моделі і задається парою множин  $U$ ,  $Y$  ( $U$  – множина входів,  $Y$  – множина виходів) і відношенням  $U \times Y$ , що формалізує зв'язок (залежність) між входами і виходами.

З'єднання систем також є системою. Таким чином можна визначати скільки завгодно складних систем, виходячи з простих.

Наведене визначення відображає в абстрактному вигляді атрибути (властивості), які властиві інтуїтивному уявленню про систему: цілісність і структурованість.

*Цілісність* (єдність) означає, що система відокремлена від зовнішньої середовища; середовище може впливати на неї через входи і сприймати відгук (реакцію) на ці дії через виходи.

*Структурованість* означає, що система розділена всередині на кілька підсистем, зв'язаних і які взаємодіють між собою таким чином, як ціла система взаємодіє з зовнішнім середовищем.

Третя властивість, що властива системі, – *цілеспрямованість* – потребує завдання деякої цілі, досягнення якої говорить про правильні роботи.

Приведемо для порівняння інші, менш формальні визначення системи.

*Система* – об'єктивна єдність закономірно зв'язаних один з одним предметів, явищ, а також знань про природу і суспільство.

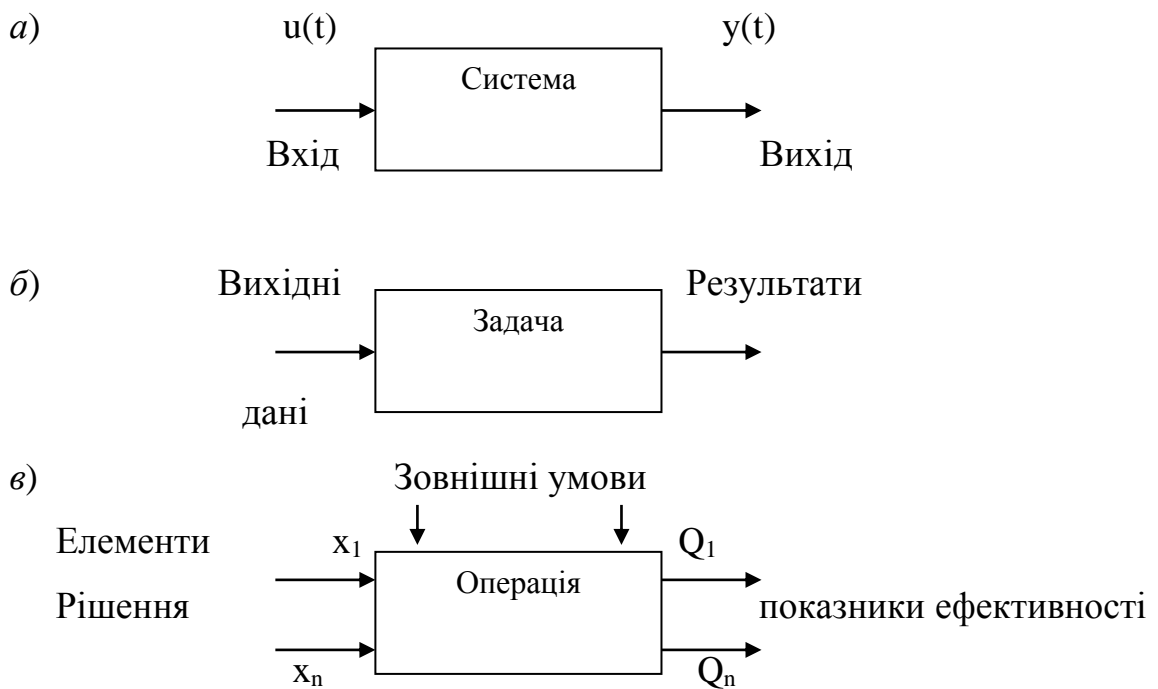


Рис. 1.1. Трактуювання поняття «система»

*Система* – сукупність взаємозв'язаних елементів (об'єктів, відносин), які представляють собою єдине ціле. Властивості системи можуть бути відсутніми у елементів, які її складають.

Наведене вище формальне визначення досить загальне; під нього підпадають практично всі види математичних моделей систем: диференціальні і різницеві рівняння, регресійні моделі, системи масового обслуговування, кінцеві і стохастичні автомати, дедуктивні системи (обчислення) і т. д. Можна трактувати як систему будь-який перетворювач вхідних даних у вихідні («чорна скринька») (рис. 1. 1, а). Наприклад, системою можна назвати процес рішення

будь-якої задачі. При цьому входами будуть вихідні дані, виходами – результати, а метою – правильне рішення (рис. 1. 1, б). Такий підхід до системи підкреслює її цілеспрямованість і веде своє походження від дослідження операцій – наукової дисципліни, яка займається розробкою кількісних методів обґрунтування рішень. Основне поняття тут – *операція*: дія, яка піддається дослідженню (проектування, конструювання, управління, економічна діяльність і т. д.). Операція відповідає деякій системі. Входами цієї системи є елементи рішення, яке приймається, про проводимо операцію, виходами – результати проведення операції (показники її ефективності (рис. 1. 1, в)).

Підкреслимо, що функціонування системи – це процес, який розгортається в часі, тобто множини ймовірних входів і виходів  $U$ ,  $Y$  – це множини функцій часу зі значеннями відповідно у множинах  $U$ ,  $Y$ :

$$U = \{u: T \rightarrow U\}, Y = \{y: T \rightarrow Y\},$$

де  $T$  – множина моментів часу, на якому розглядається система.

Система називається *функціональною (визначеною)*, якщо кожній вхідній функції  $u(t)$  відповідає єдина вихідна функція  $y(t)$ . В протилежному випадку система називається *невизначеною*. Невизначеність зазвичай виникає через неповноту інформації про зовнішні умови роботи системи. Важливою властивістю, якою наділені реальні системи, є *причинність*. Вона означає, що якщо вхідні функції  $u_1(s)$  і  $u_2(s)$  співпадають при  $s \leq t$ , тобто  $u_1(s) = u_2(s)$  при  $s \leq t$ , то відповідні вихідні функції задовольняють умові  $y_1(t) = y_2(t)$ , тобто «теперішнє не залежить від майбутнього при заданому минулому».

Числові величини, пов'язані з системою, поділяються на змінні і параметри. *Параметри* – це величини, які можна вважати постійними на проміжку часу розгляду системи. Інші числові величини є *змінними*. Значення змінних і параметрів визначають кількісну інформацію про систему. Інформація, яка залишилася, тобто якість, визначає *структуру* системи. Різниця між змінними і параметрами, а також між параметрами і структурою може бути умовною, але вона корисна в методичному відношенні. Так, типовим прийомом побудови ММ системи є *параметризація* – вибір в якості ММ

сімейства функцій, які залежать від кінцевої (зазвичай невеликої) кількості чисел – параметрів.

## 1.2 Етапи системного аналізу

Модель реального об'єкта реалізується в результаті системного аналізу. При цьому системний аналіз завжди підпорядкований визначеним цілям, які пов'язані з відображенням об'єкта.

Системний аналіз в широкому сенсі – це методологія (сукупність методичних прийомів) постановки і рішення задач побудови і дослідження систем, тісно пов'язана з математичним моделюванням. В більш вузькому сенсі системний аналіз – методологія формалізації складних (важко формалізованих, погано структурованих) задач. Системний аналіз виник як узагальнення прийомів, накопичених в задачах дослідження операцій і управління в техніці, економіці, військовій справі. Відповідні моделі і методи запозичувалися з математичної статистики, математичного програмування, теорії ігор, теорії масового обслуговування, теорії автоматичного управління. Фундаментом перелічених дисциплін є теорія систем.

В загальній теорії систем поведінка реальної системи описується таким чином, щоб підкреслити суттєві елементи кожного акту пізнання об'єктивної реальності.

У випадку причинного характеру поведінки системи однозначно підкреслюється причина (вхідні величини) і наслідки (вихідні величини) і передбачується напрямлена взаємодія вхідної величини  $Y$  на вихідні величини  $X$  і виключається можливість безпосереднього зворотного впливу вихідних величин  $X$  в системі на її вхідні величини  $Y$ .

Розглядаються пари діалектичних протилежностей, позначуваних як «діалектична пара».

Зупинимося на відмінностях при вживанні термінів «системний аналіз» і «системний підхід». Системний аналіз – цілеспрямована творча діяльність людини, на основі якої забезпечується представлення досліджуваного об’єкта у вигляді системи. Системний аналіз характеризується упорядкованим складом методичних прийомів дослідження. Що до терміну «системний підхід», то традиція його використання пов’язує його з досліджуваннями, які проводяться багатоаспектно, комплексно, з різних сторін вивчаючи предмет чи явище. Цей підхід припускає, що всі часткові задачі, які вирішуються на рівні підсистем, повинні бути пов’язані між собою і вирішуватись з позиції цілого (принцип системності). Системний аналіз – більш конструктивний напрям, який містить методику розділення процесів на етапи і під етапи, систем на підсистеми, цілей на під цілі і т. д.

Діалектична пара *частина – ціле* визначається компромісом при встановленні межі між системою та навколишньою середою, тобто за допомогою завдання поверхні, обмежуючої систему. Вона не являється чіткою поверхнею розділу, так як вхідні та вихідні величини забезпечують взаємодію системи з навколишнім середовищем.

Діалектична пара *суттєве – несуттєве* знаходить вираження в угоді про всі суттєві величини у системі, які відповідають даній поставленій цілі. Тут слід було б вести мову тільки про величини, до яких мається доступ з зовнішньої сторони системи; до них можна віднести тільки вхідні та вихідні величини або величини, визначені ними. Сюди не слід зараховувати координати стану, які є допоміжними величинами та не доступні із зовні ані для виміру, ані для керування ними.

Діалектична пара *випадковість – необхідність* повинна враховуватись шляхом відповідних висновків про невизначеність в поведінці системи. Поведінка системи детермінована, якщо немає місця для випадкових впливів; інакше у формі опису явища повинна допускатись можливість моделювання випадковості. Діалектична пара *статика – динаміка* стосується виду часової залежності поведінки процесу. З цим тісно пов’язана діалектична пара

*інерційність* — *мінливість*. В ній знаходиться вираження роль минулих подій, які запам'ятовуються в агрегованій формі у вигляді координат станів, поточні значення яких відображають суттєві риси минулого. Фактор інерційності стикається дійовими впливами управління. Ця діалектична пара знаходить своє втілення у конкретних співвідношеннях, де обидва види впливів виступають у взаємозв'язку.

Нарешті, при кожному дослідженні поведінки системи необхідно приймати до уваги діалектичну пару *неперервне* — *дискретне*, при цьому у двох варіантах. По-перше, у відношенні можливих значень спостережуваних величин (в цьому зв'язку говорять про аналогове та дискретне) та, по-друге, у відношенні врахування характеру часу при поведінці системи. В чітко неперервних системах час тече безперервно, а в дискретних системах час фіксується тільки в деякій послідовності точок. Якщо останні є рівновіддаленими, то кажуть що система має визначений тактовий період. Часто при теоретико-системному описі визначених систем обирають жорстко тільки одну з сторін діалектичної пари що розглядається. Однак слід приймати до уваги, що в реальних системах обидві сторони врівноважені, при чому умови рівноваги можуть змінюватись та навіть виявитись предметом моделювання, точніше вони повинні належним чином знаходити своє відображення в концепції систем.

В загальній теорії систем не може йти мови ні про що інше, крім комплексного взаємозв'язку між перерахованими і, можливо, ще деякими іншими діалектичними парами. Так, наприклад, у багатьох проблемах суттєву роль грають діалектичні пари *структура* — *функція* та *аналіз* — *синтез*, хоч вони і не грають вирішальної ролі на стадії визначення системи. Діалектична пара *структура* — *функція* суттєва для проектування особливо складних систем; діалектична пара *аналіз* — *синтез* тісно пов'язана з ідентифікацією систем в межах обраного класу та з плануванням виробництва таких систем.

В системному аналізі вироблена певна послідовність дій (етапів) при постановці та рішенні задач, яку будемо називати алгоритмом (методикою)



системного аналізу (рис. 1.2). Ця методика допомагає більш свідомо і грамотно ставити та вирішувати прикладні задачі. Якщо на якомусь етапі виникає утруднення, то потрібно повернутись на один з попередніх етапів та змінити (модифікувати) його. Якщо і це не допомагає, то це означає, що задача виявилась занадто складною і її потрібно розбити на декілька більш простих під задач, тобто провести декомпозицію. Кожну з отриманих під задач вирішують по тій самій методиці. Для ілюстрації застосування методики аналізу приведемо приклад.



Рис 1.2 Алгоритм системного аналізу

**Приклад.** Розглянемо автомобіль, який знаходиться перед гаражем на деякій відстані від нього (рис. 1.3, а). Вимагається поставити автомобіль в гараж і зробити це, по можливості, найкращим чином. При розв'язку будемо керуватись алгоритмом системного аналізу (див. рис. 1.2).

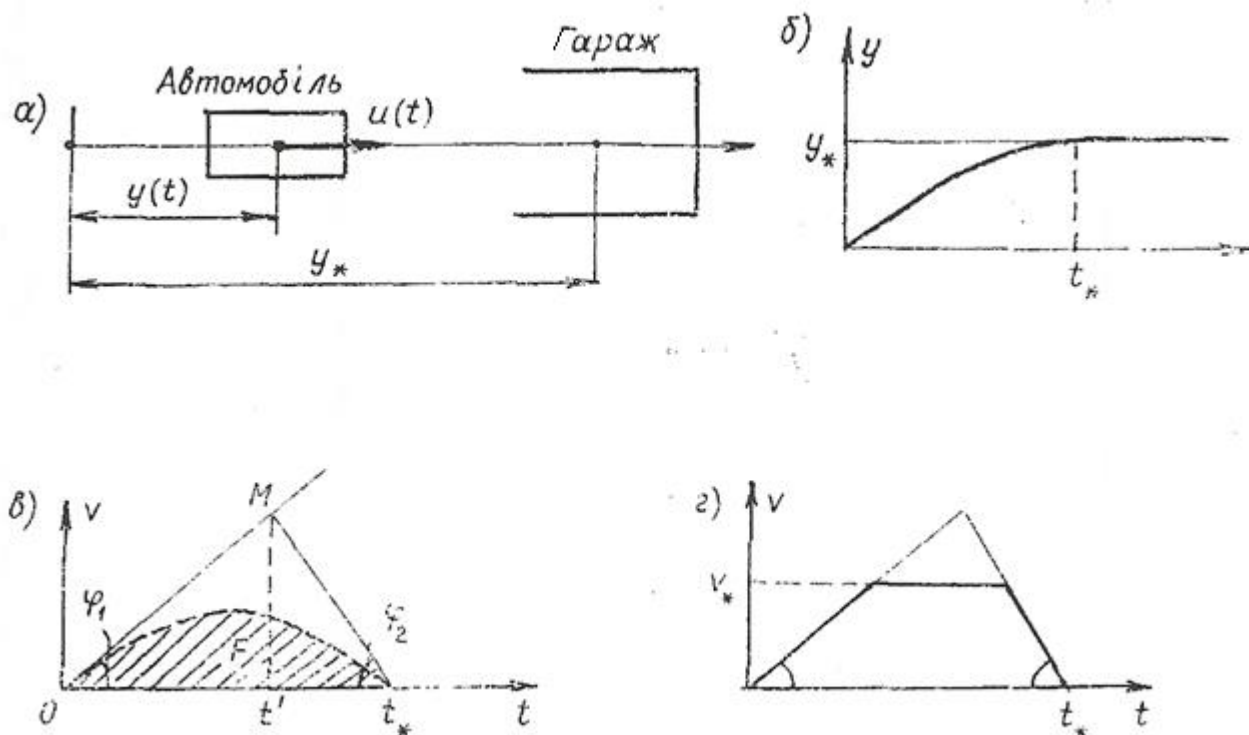


Рис 1.3 Графічна інтерпретація графічної системи

**Етап 1.** Система: автомобіль і гараж (автомобіль, який наближається до гаражу).

**Етап 2.** Вхід: сила тяги двигуна. Вихід: пройдений шлях.

**Етап 3.** Ціль: автомобіль повинен проїхати заданий шлях і затормозити.

**Етап 4.** Побудова ММ починається з позначення всіх величин (змінних і постійних), істотних для задачі. Введемо наступні позначення:

$u(t)$  – сила тяги в момент часу  $t$  (вхід);

$y(t)$  – шлях, пройдений до моменту  $t$  (вихід);

$y_*$  – відстань від автомобіля до гаража (параметр).

Потім виписуються всі рівняння і співвідношення, існуючі між введеними величинами, як в шкільних задачках на зіставлення рівнянь. Якщо можливих

рівнянь декілька, обирають найпростіші. В нашій задачі – це рівняння динаміки (2-й закон Ньютона):

$$\frac{md^2y(t)}{dt^2} = u(t), \quad (1.1 \text{ а})$$

де  $m$  — маса автомобіля, а також початкові умови

$$y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (1.1 \text{ б})$$

**Етап 5.** Модель (1.1) досить добре вивчена і в детальному аналізі не потребує. Зазначимо лише, що вона адекватна, якщо можна знехтувати розмірами автомобіля, обмеженням на його потужність, силами тертя і опору та іншими більш другорядними факторами.

**Етап 6.** Найпростіший варіант формалізації мети:

$$y(t_*) = y_*, \quad (1.2)$$

де  $t_*$  — момент зупинки - виявляється незадовільним, оскільки в (1.2) не формалізована сама вимога зупинки  $y(t_*) = 0$  і, значить, незрозуміло, як система буде вести себе при  $t > t_*$ . Правильніше задати мету співвідношенням:

$$y(t) = y_* \quad \text{при } t > t_*, \quad (1.3)$$

з якого випливає, зокрема, що  $y(t) = 0$  при  $t > t_*$ .

На перший погляд, завдання поставлено і можна переходити до його вирішення, тобто до етапу 8. Але, виявляється, однозначного рішення завдання не має: здоровий глузд говорить про те, що існує нескінченно багато способів досягти мети (1.3). Значить, потрібно доповнити мету правилом відбору способів, що дозволяє відповідати на питання: який спосіб краще. Задамося таким важливим правилом: той спосіб вважається кращим, який швидше приводить до мети. Формально нову мету можна записати так:

$$\min \{t_* : y(t) = y_* \text{ при } t \geq t_*\} \quad (1.4)$$

Але тепер фізичні міркування показують, що рішення поставленої задачі тривіально: шуканий мінімум в (1.4) дорівнює нулю! Дійсно, вибравши достатньо велику силу тяги, можна додати автомобілю як математичного об'єкту, описуваному ММ (1.1), як завгодно велике прискорення і як завгодно швидко перемістити його на будь-яку задану відстань. Мабуть, потрібно ввести

обмеження, що будуть виключати беззмістовні рішення. Можна було б ускладнити ММ системи: врахувати обмежену потужність двигуна, його інерційність, сили тертя і т. д. Однак розумніше спробувати залишитися в рамках ММ (1.1), (1.4), ввівши додатково лише обмеження на силу тяги:

$$-a \leq u(t) \leq b \quad (1.5)$$

Таким чином, щоб надати задачі сенс, нам довелося повернутися на етап 7.

**Етап 8.** Для вирішення завдання можна було б застосувати потужний і добре розроблений апарат теорії оптимального управління (варіаційне числення, принцип максимуму Понтрягіна). Однак спочатку треба спробувати вирішити задачу елементарними засобами. Для цього часто буває корисно перейти до геометричної інтерпретації завдання, щоб привернути нашу геометричну інтуїцію. Природна інтерпретація (рис. 1.3, б) не дає вирішення, так як не дозволяє в зручній формі представити обмеження на допустимі траєкторії руху автомобіля. Задача змінюється докорінно, якщо перейти до іншої ММ. Введемо нову змінну:  $v(t) = y'(t)$  (швидкість). Тоді замість (1.1) виникає рівняння:

$$mv' = u, \quad v(0) = 0, \quad (1.6)$$

мета (1.4) запишеться у вигляді:

$$\min \{t_* : \int_0^t v(s) ds = y_*, \text{ при } t > t_*\}, \quad (1.7)$$

а обмеження (1.5) перетворяться в обмеження на швидкість зміни нової змінної:

$$-a/m \leq v'(t) \leq b/m \quad (1.8)$$

Отже, ми змінили вихід системи, через що довелося ще раз застосувати етапи 2 - 7.

Геометрична інтерпретація руху системи (1.6) - (1.8) в площині  $\{v, t\}$  зображена на рис. 1.3, в. З нього видно, що для розв'язання задачі потрібно знайти криву  $v(t)$  ( $t \geq 0$ ) з заданою площею фігури  $F$  під нею та найменшу можливу координату правого кінця  $t_*$ , яка лежить в трикутнику  $OMN$  з

заданими кутами нахилу  $\varphi_1, \varphi_2$  бокових сторін (відповідно до (1.8)  $tg\varphi_1 = \frac{b}{m}, tg\varphi_2 = \frac{a}{m}$ ).

Геометричний розв'язок очевидний: фігура  $F$  повинна заповнювати весь трикутник  $OMK$ . Це значить, що автомобіль повинен рухатись з максимальним прискоренням до деякого моменту  $t'$ , після чого ввімкнути максимальне гальмування і в момент  $t_*$  вимкнути двигун. Формули для знаходження моменту перемикання  $t'$  виводяться з елементарного розрахунку трикутника  $OMK$  по заданій площі і кутам. Вони мають вид

$$t' = \sqrt{\frac{2ma \cdot t_*}{b(a+b)}}, \quad t_* = \sqrt{\frac{2m(a+b)y_*}{ab}}.$$

Розглянута геометрична модель дозволяє розв'язувати і більш складні задачі. Наприклад, якщо з міркувань безпеки потрібно врахувати обмеження на максимальну швидкість:  $|y(t)| \leq v^*$ , то розв'язок легко побачити з рис. 1.3, з: графік оптимальної траєкторії представляє собою трапецію.

Ще більш складні задачі (наприклад, при введенні обмежень на витрати пального в вигляді  $\int_0^\infty |u(t)|dt \leq A$ ) не мають простого аналітичного розв'язку, подібного до (1.9), і практично розв'язуються лише чисельно, з залученням математичного апарату наближеної мінімізації функціоналів. Однак і для них розв'язок спрощеної задачі не втрачає важливості, оскільки він дозволяє отримати початкове наближення до розв'язку складної задачі, виявити фактори, які найбільш сильно впливають на розв'язок складної задачі, і, найголовніше, співвідносити результати математичного дослідження із сенсом.

Узагальнюючи сказане, можна дати пораду вивчаючому математичне моделювання: «не розв'язуй складну задачу, не розв'язавши спочатку більш просту!».

## 1.3 Матеріал для повторення

### 1.3.1 Рівняння з відокремлюваними

Рівняння з відокремлюваними змінними можуть бути записані в вигляді

$$y' = f(x)g(y), \quad (1)$$

А також в вигляді

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \quad (2)$$

Для розв'язку такого рівняння потрібно обидві його частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину рівняння входило тільки  $x$ , в другу – тільки  $y$ , і потім інтегрувати обидві частини.

При діленні обох частин рівняння на вираз, який містить невідомі  $x$  і  $y$ , можуть бути загублені розв'язки, які переводять цей вираз в нуль.

2. Рівняння виду  $y' = f(ax + by)$  приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною  $z = ax + by$  (або  $z = ax + by + c$ , де  $c$  будь-яке).

**Приклад.** Розв'язати рівняння

$$x^2 y^2 y' + 1 = y.$$

Приводимо рівняння до вигляду (2):

$$x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2 y^2 dy = (y - 1)dx$$

Розділимо обидві частини рівняння на  $x^2(y - 1)$ :

$$\frac{y^2}{y - 1} dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Змінні розділені. Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{y^2}{y - 1} dy = \int \frac{dx}{x^2};$$

$$\int \frac{y^2}{y - 1} dy = \int \frac{y^2 - 1 + 1}{y - 1} dy = \int \frac{(y - 1)(y + 1) + 1}{y - 1} dy =$$

$$\int \left( y + 1 + \frac{1}{y - 1} \right) dy = \frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| + C;$$

$$-\frac{1}{x} + c = \frac{y^2}{2} + y + \ln |y - 1|$$

При діленні на  $x^2(y - 1)$  могли бути загублені розв'язки  $x = 0$  і  $y - 1 = 0$ , тобто  $y = 1$ .

Підстановкою в (3) знаходимо,  $y = 1$  – розв'язок рівняння (3), а  $x = 0$  – ні.

1.3.2 Геометричні та фізичні задачі, які приводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

1. Щоб розв'язати геометричні задачі, потрібно побудувати креслення, позначити шукану криву через  $y = y(t)$  (якщо задача розв'язується в прямокутних координатах) і виразити всі згадувані змінні величини в задачі через  $x, y$  і  $y'$ . Тоді дане в умові задачі співвідношення перетворюється в диференціальне рівняння, з якого можна знайти шукану функцію  $y(x)$ .

2. В фізичних задачах потрібно перш за все вирішити, яку з величин взяти за незалежну змінну, а яку – за шукану функцію. Потім потрібно виразити, на скільки зміниться шукана функція  $y$ , коли незалежна змінна  $x$  отримає прирощення  $\Delta x$ , тобто виразити різницю  $y(x + \Delta x) - y(x)$  через величини, про які говориться в задачі. Поділивши цю різницю на  $\Delta x$  і перейшовши до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$ , отримаємо диференціальне рівняння, з якого можна знайти шукану функцію.

В більшості задач містяться умови, за допомогою яких можна визначити значення постійних, які входять в загальне рішення диференціального рівняння. Іноді диференціальне рівняння можна скласти простішим шляхом, скориставшись фізичними властивостями похідної (якщо незалежна змінна – час  $t$ , то  $\frac{dy}{dt}$  – це швидкість зміни величини  $y$ ).

В деяких задачах при складанні рівняння слід використовувати фізичні закони, які сформульовані в тексті перед задачею.

**Приклад 1.** Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотичної і віссю абсцис, є постійна величина, яка дорівнює  $a^2$ .

Розв'язок.

Візьмемо за незалежну змінну координату  $x$ , а за шукану функцію -  $y(x)$ . Зобразимо криву  $y(x)$  в прямокутній системі координат (рис. 1.4).

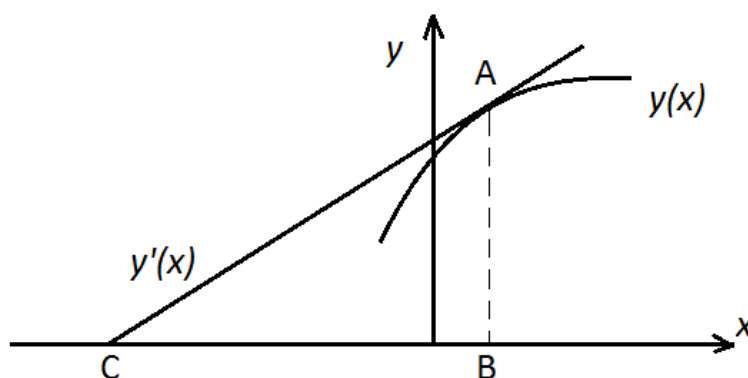


Рис. 1.4

Проведемо дотичну  $y'(x)$  до даної кривої в точці  $A$ . Площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $S = a^2$

$$S = a^2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CB$$

$$AB = y(x)$$

$$\operatorname{tg} \angle ACB = y'(x)$$

$$BC = \frac{AB}{\operatorname{tg} \angle ACB} = \frac{y(x)}{y'(x)}$$

$$a^2 = \frac{1}{2} y(x) \cdot \frac{y(x)}{y'(x)}$$

$$y'(x) = \frac{y^2}{2a^2}$$



$$\frac{dy}{y^2(x)} = \frac{dx}{2a^2}$$

$$-y(x)^{-1} = \frac{x}{2a^2} + c$$

$$2a^2 = (c \pm x) \cdot y$$

**Приклад 2.** В посудину, яка містить 10 л води, безперервно ллється зі швидкістю 2 л розчин, в кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Розчин, який ллється в посудину перемішується з водою, і суміш витікає з посудини з тою ж швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 5 хвилин?

Розв'язок.

Візьмемо за незалежну змінну час  $t$ , а за шукану функцію  $y(t)$  – кількість солі в посудині через  $t$  хвилин після початку досліду. Знайдемо, на скільки зміниться кількість солі за проміжок часу від моменту  $t$  до моменту  $t + \Delta t$ . В одну хвилину надходить 2 л розчину, а в  $\Delta t$  хвилин –  $2\Delta t$  літрів; в цих  $2\Delta t$  літрах міститься  $0,3 \cdot 2\Delta t = 0,6\Delta t$  кг солі. З іншого боку, за час  $\Delta t$  з посудини витікає  $2\Delta t$  літрів розчину. В момент  $t$  в усій посудині (10 л) міститься  $y(t)$  кг соли, отже, в  $2\Delta t$  літрах розчину, який витікає містилось би  $0,2\Delta t \cdot y(t)$  кг солі, якщо б за час  $\Delta t$  вміст солі в посудині не мінявся. Але так як він за цей час міняється на величину, безкінечно малу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то в  $2\Delta t$  літрах, які витікають міститься  $0,2\Delta t(y(t) + a)$  кг солі, де  $a \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Отже, в розчині, який втікає за проміжок часу  $(t, t + \Delta t)$ , міститься  $0,6\Delta t$  кг солі, а у розчині, який витікає –  $0,2\Delta t \cdot (y(t) + a)$  кг. Прирошення кількості солі за цей час  $y(t + \Delta t) - y(t)$  дорівнює різниці знайдених величин, тобто

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0,6\Delta t - 0,2\Delta t \cdot (y(t) + a).$$

Розділимо на  $\Delta t$  і перейдемо до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ . В лівій частині отримаємо похідну  $y'(t)$ , а в правій отримаємо  $0,6 - 0,2y(t)$ , так як  $a \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Отже, маємо диференціальне рівняння  $y'(t) = 0,6\Delta t - 0,2y(t)$ .

Розв'язуючи його, отримуємо

$$y(t) = 3 - Ce^{-0,2t}.$$

Так як при  $t = 0$  солі в посудині не було, то  $y(0) = 0$ . Вважаючи в (1)  $t=0$ , знайдемо  $y(0) = 3 - C$ ;  $0 = 3 - C$ ;  $C = 3$ . Підставляючи це значення  $C$  в (1), отримаємо  $y(t) = 3 - 3e^{-0,2t}$ . При  $t = 5$  в посудині буде

$$y(5) = 3 - 3e^{-0,2 \cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1,9 \text{ кг солі.}$$

### 1.3.3 Завдання

Розв'язати рівняння

1.

$$xydx + (x + 1)dy = 0$$

2.

$$\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$$

3.

Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

## 2. ЕЛЕМЕНТАРНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

Розглянемо підхід для побудови найпростіших математичних моделей, які частіше всього використовуються для отримання оцінок величин тих чи інших властивостей реальних об'єктів, на основі фундаментальних законів природи и ієрархічних ланцюжків.

### 2.1 Фундаментальні закони природи.

Найбільш поширений метод побудови моделей полягає в застосуванні фундаментальних законів природи до конкретної ситуації. Ці закони загальновизначені, багаторазово підтверджені досвідом, служать основою безлічі науково-технічних досягнень. Тому їх обґрунтованість не викликає сумнівів, що, крім усього іншого, забезпечує досліднику потужну психологічну підтримку. На перший план висуваються питання, пов'язані з тим, який закон (закони) слід застосовувати в даному випадку і як це робити.

*а) Збереження енергії.* Цей закон відомий майже двісті років і посідає, мабуть, найбільш почесне місце серед великих законів природи. Покладаючись на нього, експерт з балістики, бажаючи швидко визначити швидкість револьверної кулі і не має поблизу спеціальної лабораторії, може скористатися відносно простим пристроєм типу маятника - вантажу, підвішеного на легкому жорсткому і вільно обертовому стрижні (рис. 2.1).

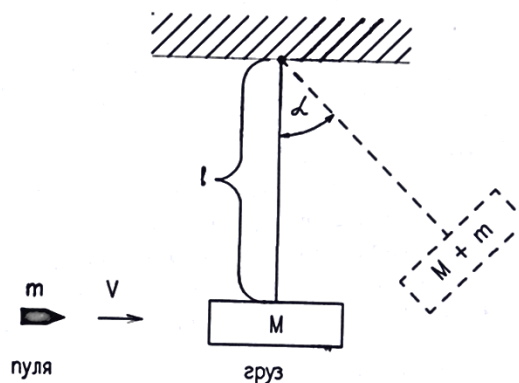


Рис. 2.1. Пристрій для визначення швидкості кулі

Куля, що застрягла у вантажі, повідомить системі «куля-вантаж» свою кінетичну енергію, яка в момент найбільшого відхилення стрижня від вертикалі повністю перейде в потенційну енергію системи.

Ці трансформації описуються ланцюжком рівностей:

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m) \frac{V^2}{2} = (m + M)gl(1 - \cos \alpha)$$

Тут  $\frac{mv^2}{2}$  - кінетична енергія кулі маси  $m$ , що має швидкість  $v$ ,  $M$  - маса вантажу,  $V$  - швидкість системи «куля-вантаж» відразу після зіткнення,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $l$  - довжина стрижня,  $\alpha$  - кут найбільшого відхилення. Шукана швидкість визначається формулою:

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m)gl(1 - \cos \alpha)}{m}}, \quad (2.1)$$

яка буде цілком точною, якщо не враховуючі нами втрати енергії на розігрів кулі та вантажу, на подолання опору повітря, розгін стрижня і т. д. невеликі. Це, на перший погляд, розумне міркування насправді невірне. Процеси, що відбуваються при «злипання» кулі і маятника, уже не є чисто механічними. Тому застосований для обчислення величини  $V$  закон збереження механічної енергії несправедливий: зберігається повна, а не механічна енергія системи. Він визначає лише нижню межу для оцінки

швидкості кулі (для правильного вирішення цієї простої задачі треба скористатися також законом збереження імпульсу).

Подібні міркування може застосувати і інженер для оцінки часу  $t_k$  свердління шару металу товщини  $L$  лазером з потужністю  $W$ , випромінювання якого перпендикулярно поверхні матеріалу (рис. 2.2).

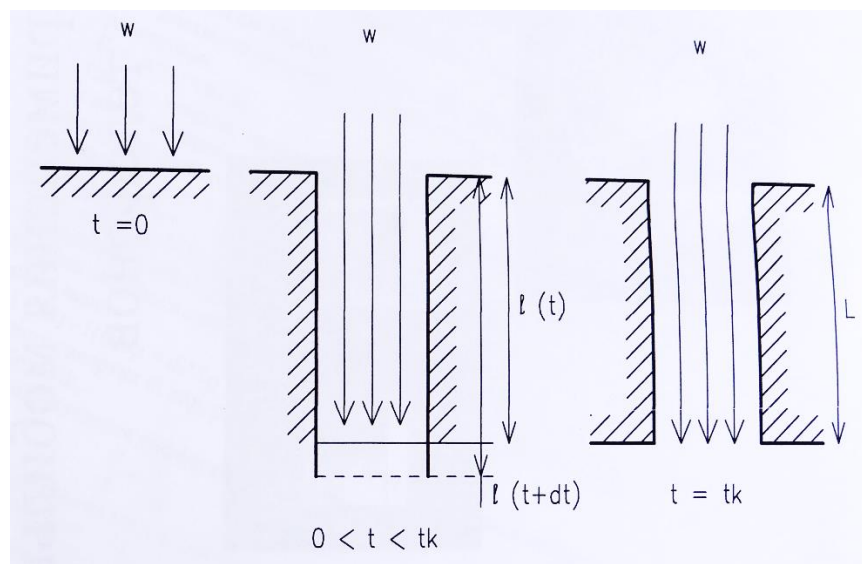


Рис. 2.2. Початкова, проміжна і кінцева стадії свердління металу лазером

Якщо енергія лазера повністю йде на випаровування стовпчика металу маси  $LSp$  ( $S$  - опромінювана площа,  $LS$  - обсяг стовпчика,  $p$  - щільність речовини), то закон збереження енергії виражається рівністю:

$$E_0 = W * t_k = hLSp, \quad (2.2)$$

де  $h$  - енергія, необхідна для випаровування одиниці маси. Величина  $h$  має складову структуру:  $h = (T_{nl} - T)h_1 + h_2 + h_3$ , оскільки матеріал необхідно послідовно нагрівати до температури плавлення  $T_{nl}$ , а, потім розплавити і перетворити на пар ( $T$  - початкова температура,  $h_1$  - питома теплоємність,  $h_2$  і  $h_3$  - відповідно питома теплота плавлення і пароутворення). Зміна глибини виїмки  $l(t)$  з часом визначається з детального балансу енергії в проміжку часу від  $t$  до  $t+dt$ . На випарувану за цей час масу  $[l(t+dt) - l(t)]Sp = dl * Sp$  витрачається енергія  $dlhSp$ , рівна енергії  $Wdt$ ,

повідомляючи речовині лазером:  $dlhSp = Wdt$ , звідки виходить диференціальне рівняння:  $\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hSp}$ .

Його інтегрування (з урахуванням того, що початкова глибина виїмки дорівнює нулю) дає:

$$l(t) = \frac{W}{hSp} t = \frac{E(t)}{hSp}, \quad (2.3)$$

де  $E(t)$  - вся енергія, виділена лазером на момент часу  $t$ . Отже, глибина виїмки пропорційна витраченій енергії (причому величина  $t_k$ , коли  $l(t_k) = L$ , збігається з обчисленою за формулою (2.2)).

В дійсності процес свердління набагато складніше розглянутої схеми - енергія витрачається на нагрівання речовини, на видалення парів з виїмки, яка може мати неправильну форму, і т. д. Тому впевненість у правильності запропонованого математичного опису значно менше, ніж у випадку з кулею. Питання про відповідність об'єкта і його моделі - один з центральних в математичному моделюванні, і надалі ми будемо неодноразово до нього повертатися.

*б) Збереження матерії.* Саме цим міркуванням керується школяр, що вирішує задачу про заповнення басейну водою, що впадає і витікає з двох труб. Звичайно ж, область застосування цього закону незрівнянно ширше. Нехай, наприклад, є невелика кількість радіоактивної речовини (урану), оточеного товстим шаром «звичайного» матеріалу (свинцю), - ситуація типова або при зберіганні розділних матеріалів, або при їх використанні в енергетиці (рис. 2.3). Під словом «невеликий» мається на увазі полегшуючу обставина, а саме те, що всі продукти розпаду, не відчувачи зіткнень з атомами речовини, безперешкодно залишають область  $I$ . Іншими словами, довжина вільного пробігу продуктів розпаду  $\lambda_1$  в першій речовині значно більше характерних розмірів самого матеріалу  $L_1$ , тобто  $\lambda_1 \gg L_1$ . Слова «товстий шар» означають, що в згоді з цілями зберігання продукти розподілу повністю поглинаються в області  $II$ . Це гарантується при виконанні протилежної умови  $\lambda_{11} \ll L_{11}$ , де  $\lambda_{11}$  -

довжина пробігу продуктів розпаду в другій речовині,  $L_{II}$  - його характерний розмір.

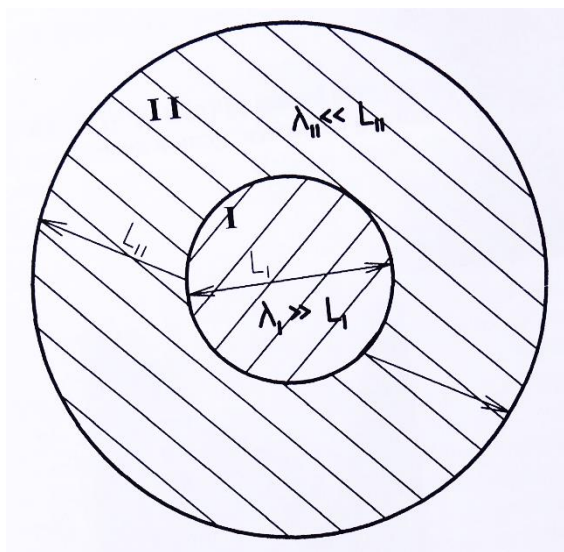


Рис. 2.3. Схема збереження роздільних матеріалів

Отже, все, що вилітає з області  $I$ , поглинається в області  $II$ , і сумарна маса обох речовин з часом не змінюється. Це і є закон збереження матерії, застосований до даної ситуації. Якщо в початковий момент часу  $t=0$  маси речовин були рівні  $M_I(0)$  і  $M_{II}(0)$ , то в будь-який момент часу справедливий баланс:

$$M_I(0) + M_{II}(0) = M_I(t) + M_{II}(t). \quad (2.4)$$

Одного рівняння (2.4), очевидно, недостатньо для визначення поточних значень двох мас -  $M_I(t)$  і  $M_{II}(t)$ . Для замикання математичного формулювання необхідно залучити додаткове міркування про характер розпаду. Воно свідчить, що швидкість розпаду (число атомів, що розпадаються в одиницю часу) пропорційна загальному числу атомів радіоактивної речовини. За невеликий час  $dt$  між моментами  $t$  і  $t+dt$  всього розкладеться  $N_I(t+dt) - N_I(t) = -\alpha N_I(t + \xi dt)$ ,  $\alpha > 0, 0 < \xi < 1$ , атомів. Тут вдруге використаний закон збереження речовини, але стосовно не до всього процесу, а до відрізка часу  $dt$ . У цьому рівнянні, що описує баланс атомів, у правій частині стоїть знак мінус (речовина зменшується), а величина  $N_I(t + \xi dt)$  відповідає деякому

середньому значенню кількості атомів за розглянутий час. Перепишемо його у диференціальній формі:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\alpha N_1(t)$$

Враховуючи, що  $M_1(t) = \mu_1 N_1(t)$ , де  $\mu_1$  - атомна вага речовини  $I$ , отримуємо:

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = -\alpha M_1(t) \quad (2.5)$$

При мимовільній радіоактивності будь-який атом має деяку незалежну від стану навколишнього речовини ймовірність розпаду. Тому чим більше (менше) самої радіоактивної речовини, тим більше (менше) виділяється продуктів розпаду в одиницю часу. Коефіцієнт пропорційності  $\alpha > 0$  (постійна розпаду) визначається конкретною речовиною. Рівняння (2.4), (2.5) разом з умовами  $\lambda_1 \ll L_1$ ,  $\lambda_{11} \ll L_{11}$ , а також величинами  $\alpha$ ,  $M_1(0)$ ,  $M_{11}(0)$  і складають математичну модель розглянутого об'єкта.

Інтегруючи (2.5), отримуємо, що маса подільного матеріалу зменшується за експоненціальним законом  $M_1(t) = M_1(0)e^{-\alpha t}$  і при  $t \rightarrow \infty$  в області  $I$  речовина повністю зникає. Так як сумарна маса у відповідності з (2.4) залишається постійною, то в області  $II$  кількість речовини зростає:  $M_{11}(t) = M_{11}(0) + M_1(0) - M_1(0)e^{-\alpha t} = M_{11}(0) + M_1(0)(1 - e^{-\alpha t})$ , і при  $t \rightarrow \infty$  продукти розпаду повністю переходять з області  $I$  у область  $II$ .

в) *Збереження імпульсу.* Нерухомо стоячий у безвітряну погоду на поверхні озера човен почне рухатися вперед, якщо зробити кілька кроків від його носа до корми. Так проявляє себе закон збереження імпульсу, який стверджує: повний імпульс системи, що не відчуває дії зовнішніх сил, зберігається. На пересування весляра човен реагує зміщенням в протилежну сторону. Принцип реактивного руху покладено в основу багатьох технічних пристроїв, наприклад, ракети, що виводить на орбіту навколо Землі штучний супутник, для чого їй потрібно розвинути швидкість приблизно 8 км/с. Найпростіша



математична модель руху ракети виходить із закону збереження імпульсу в нехтуванні опором повітря, гравітацією та іншими силами, виключаючи, звичайно, тягу реактивних двигунів.

Нехай продукти згоряння ракетного палива залишають розташовані в кормовій частині вихлопні сопла зі швидкістю  $u$  (для сучасних палив величина  $u$  дорівнює 3-5 км/с). За малий проміжок часу  $dt$  між моментами  $t$  та  $t+dt$  частина палива вигоріла, і маса ракети змінилася на величину  $dm$ . Змінився також імпульс ракети, проте сумарний імпульс системи «ракета плюс продукти згоряння» залишився тим же, що і в момент  $t$ , тобто  $m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) - dm[v(t+\xi dt) - u]$ , де  $v(t)$  - швидкість ракети,  $v(t+\xi dt) - u$ ,  $0 < \xi < 1$  - середня за проміжок  $dt$  швидкість спливання з сопел газів (обидві швидкості беруться відносно Землі). Перший член в правій частині цієї рівності - імпульс ракети в момент  $t+dt$ , другий - імпульс, переданий стікаючим газом за час  $dt$ . Враховуючи, що  $m(t+dt) = m(t) + (\frac{dm}{dt})dt + O(dt^2)$ , закон збереження імпульсу можна переписати у вигляді диференціального рівняння  $m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u$  в якому член  $-(\frac{dm}{dt})u$ , очевидно, не що інше, як сила тяги ракетних двигунів, і яке, будучи перетвореним до виду  $\frac{dv}{dt} = -\frac{d(\ln m)}{dt}u$  і легко інтегрується:  $v(t) = v_0 + u \ln(\frac{m_0}{m(t)})$ , де  $v_0$ ,  $m_0$  - відповідно швидкість і маса ракети в момент  $t = 0$ . Якщо  $v_0 = 0$ , то максимальна швидкість ракети, яка досягається при повному згорянні палива, дорівнює:

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right) \quad (2.6)$$

Тут  $m_p$  - корисна маса (маса супутника),  $m_s$  - структурна маса (маса власне ракетної конструкції - паливних баків, двигунів, систем управління і т. д.). Проста формула Ціолковського (2.6) дозволяє зробити фундаментальний висновок про конструкцію ракети для космічних польотів. Введемо величину  $\lambda = m_s / (m_0 - m_p)$ , яка характеризує при

$m_p = 0$  відношення структурної до початкової мас ракети. Тоді для практично реальних значень  $\lambda = 0,1$ ;  $u = 3$  км/с отримуємо при  $m_p = 0$

$$v = u \ln(1/\lambda) = 7 \text{ км/с}.$$

Звідси випливає, що навіть у самій ідеальній ситуації (корисна маса дорівнює нулю, відсутні гравітація та опір повітря і т. д.) ракета розглянутого типу не здатна досягти першої космічної швидкості. Тим самим необхідно використовувати багатоступінчасті ракети - висновок, до якого прийшли засновники космонавтики. Даний приклад ілюструє також свого роду принцип «найбільшого сприяння», часто використовуваний на початковій стадії математичного моделювання складних об'єктів: якщо об'єкт, поставлений в найкращі умови, не в змозі досягти потрібних характеристик, то треба змінити сам підхід до об'єкта або пом'якшити вимоги до нього; якщо ж вимоги в принципі досяжні, то наступні кроки пов'язані з дослідженням впливу на об'єкт додаткових ускладнюючих факторів.

## 2.2 Ієрархічний метод отримання моделей.

Лише в деяких випадках буває вигідною побудова математичної моделі, навіть відносно простих об'єктів, одразу в повній мірі, з урахуванням всіх факторів, що є важливими. Тому зручним є підхід, що реалізує принцип «від простого-до складного», коли наступний крок робиться після досить детального вивчення не дуже складної моделі. При цьому виникає послідовність (ієрархія) все більш повних моделей, кожна з яких узагальнює попередні, включаючи їх в якості окремих випадків. Побудуємо таку ієрархічну послідовність на прикладі багатоступеневої ракети. Як було встановлено в п.1, реальна одноступенева ракета не здатна розвинути першу космічну швидкість. Причина цього – витрата пального на розгін непотрібної, відпрацьованої частини структурної маси. Отже, під час руху ракети необхідно періодично

позбавлятися від баласту. В практичній конструкції це означає, що ракета складається з кількох рівнів, яких позбуваються по мірі їх використання. Нехай  $m_i$  – загальна маса  $i$ -го рівня,  $\lambda m_i$  – відповідна структурна маса (при цьому маса палива рівна величині  $((1-\lambda)m_i)$ ),  $m_p$  – маса корисного навантаження. Величина  $\lambda$  та швидкість виходу газів  $u$  однакові для всіх рівнів. Візьмемо для прикладу число рівнів  $n=3$ . Початкова маса такої ракети рівна

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

Розглянемо момент коли використано все паливо першого рівня і маса ракети рівна величині

$$m = m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3.$$

Тоді за формулою (2.6) початкової моделі швидкість ракети рівна

$$v_1 = u \ln \left( \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3 + \lambda m_1} \right), \quad (2.7)$$

Після досягнення швидкості  $v_1$  структурна маса  $\lambda m_1$  відкидається та вмикається другий рівень. Маса ракети в цей момент рівна  $m_p + m_2 + m_3$ .

Починаючи з цього моменту й до моменту повного згорання палива другого рівня ніщо не заважає користуватися вже побудованою моделлю, застосувавши її до даного випадку. Всі міркування про збереження сумарного імпульсу та відповідні розрахунки залишаються в силі (варто лише врахувати, що у ракети вже є початкова швидкість  $v_1$ ). Тоді за формулою (2.6) після вигорання палива з другого рівня ракета досягає швидкості:

$$v_2 = v_1 + u \ln \left( \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right), \quad (2.8)$$

Такі ж міркування придатні й для третього рівня ракети. Після відключення її двигунів швидкість ракети рівна :

$$V_3 = v_2 + u \ln \left( \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right), \quad (2.9)$$

Цю послідовність не важко продовжити для будь-якої кількості рівнів та отримати відповідні формули. В випадку  $n=3$  для остаточної швидкості маємо:

$$\frac{v_3}{u} = \ln \left\{ \left( \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3 + \lambda m_1} \right) \left( \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \left( \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right) \right\},$$

або, ввівши нову змінну:

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}; \quad \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}; \quad \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}.$$

Отримуємо :

$$\frac{v_3}{u} = \ln \left\{ \left( \frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)} \right) \left( \frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)} \right) \left( \frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)} \right) \right\}, \quad (2.10)$$

Даний вираз симетричний по відношенню до величин  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , й неважко показати, що його максимум досягається в симетричному випадку, тобто при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ . При цьому для  $i=3$ :

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, \dots P = \exp \left( -\frac{v_3}{3u} \right).$$

Добуток  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha^3$  дорівнює, як легко перевірити, відношенню:

$$\frac{m_0}{m_p}, \text{ або } \alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left( \frac{1-\lambda}{P-\lambda} \right)^3.$$

Для багатоступеневої ракети, аналогічно, маємо:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left( \frac{1-\lambda}{P-\lambda} \right)^n, \dots P = \exp \left( -\frac{v_n}{nu} \right), \quad (2.11)$$

де  $n$  – число рівнів.

Проаналізуємо формулу (2.11). Прийmemo  $v_n = 10,5 \text{ км/с}$ ,  $\lambda = 0,1$ .

Тоді для  $n = 2, 3, 4$  отримаємо  $m_0 = 149 m_p$ ,  $m_0 = 77 m_p$ ,  $m_0 = 65 m_p$  відповідно. Це означає, що двоступенева ракета придатна для виведення на орбіту деякої корисної маси (однак, при одній тоні корисного вантажу необхідно мати ракету вагою 149 тон). Перехід до третього рівня зменшує масу ракети майже в два рази (але, звичайно, ускладнює її конструкцію), а чотирьохступенева ракета дає помітного виграшу порівняно з трьохступеневою. Побудова ієрархічної послідовності дозволила відносно просто прийти до цих важливих висновків. Ієрархія математичних моделей часто створюється і за протилежним принципом «від складного до простого». В цьому випадку реалізується шлях «зверху вниз» - з достатньо загальної та складної моделі, при відповідних спрощуючих припущеннях, отримуємо послідовність все більш простих (але таких, що мають звужену сферу застосування) моделей.

## 2.3 Матеріал для повторення

### 2.3.1 Однорідні рівняння

1. Однорідні рівняння можуть бути записані в вигляді  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , а також в вигляді  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ , де  $M(x,y)$  і  $N(x,y)$  – однорідні функції одного й того ж порядку. (Функція  $M(x,y)$  називається однорідною функцією порядку  $n$  якщо для всіх  $k > 0$  маємо  $M(kx, ky) \equiv k^n M(x, y)$ .)

Щоб знайти розв'язок однорідного рівняння можна зробити заміну  $y = tx$ , після чого отримуємо рівняння з розподіленими змінними.

Приклад. Розв'язати рівняння  $xdy = (x+y)dx$ .

Це рівняння-однорідне. Вважаємо  $y = tx$ . Тоді  $dy = xdt + tdx$ . Підставивши в рівняння, отримаємо  $x(xdt + tdx) = (x + tx)dx$ ;  $xdt = dx$ .

Вирішуємо отримане рівняння з розділеними змінними  $dt = \frac{dx}{x}$ ;  $t = \ln|x| + C$ .

Повертаємось до старої змінної  $y$ . Отримаємо  $y = x(\ln|x| + C)$ . Крім того, існує рішення  $x = 0$ , яке було втрачене при діленні на  $x$ .

2. Рівняння вигляду  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$  зводиться до однорідного за допомогою переносу початку координат в точку перетину прямих  $ax + by + c = 0$  і  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ . Якщо ці прямі не перетинаються, то  $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ ; отже, рівняння має вигляд  $y' = F(ax + by)$  і зводиться до рівняння з розділеними змінними заміною  $z = ax + by$  (або  $z = ax + by + c$ ).

3. Деякі рівняння можна привести до однорідних заміною  $y = z^m$ . Число  $m$  зазвичай зарані не відоме. Щоб його знайти треба в рівнянні зробити заміну  $y = z^m$ . Потребуючи, щоб рівняння було однорідним, знайдемо число  $m$ , якщо це можливо. Якщо ж це зробити неможливо, то рівняння не зводиться до однорідного цим способом.

Приклад. Дано рівняння  $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$ . Після заміни  $y = z^m$  рівняння матиме вигляд  $2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6$ . Це рівняння буде однорідним в тому

випадку, коли степені всіх його членів рівні між собою, тобто  $4+(2m-1)=4m=6$ . Ці рівності виконуються одночасно. Якщо  $m=3/2$ . Отже, рівняння можна привести до однорідної заміни  $y=z^{3/2}$ .

### 2.3.2 Завдання

1.  $(x+2y)dx-xydy=0$ .
2.  $(x-y)dx+(x+y)dy=0$ .
3.  $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$ .
4.  $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$ .
5.  $y^2+x^2y'=xyy'$ .
6.  $(x^2+y^2)y'=2xy$ .



Уявимо затрачений час, як функцію величини  $\alpha$  – кута між прямою і відрізком шляху від точки А до прямої:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v \sin \alpha} + \frac{b}{v \sin \beta(\alpha)}$$

Тут  $a$  і  $b$  – довжина перпендикулярів, що виходять з точок А і В на пряму,  $\beta(\alpha)$  – кут між прямою і відрізком шляху із точки дотику до точки В.

Умова екстремальності  $t(\alpha)$  по аргументу  $\alpha$  означає, що :

$$\begin{aligned} \frac{dt(\alpha)}{d\alpha} &= 0, \text{ при } \alpha = \alpha_{\text{ext}} \text{ або} \\ \frac{a \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{b \cdot \cos \beta(\alpha)}{\sin^2 \beta(\alpha)} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для будь-яких значень  $\alpha$  справедлива рівність

$$c = \frac{a}{\operatorname{tg}(\alpha)} + \frac{b}{\operatorname{tg} \beta(\alpha)},$$

де  $c$  – відстань між проекціями точок А і В на пряму (однакове для всіх траєкторій). Диференціюючи його, отримаємо відношення:

$$\frac{a}{\sin^2 \alpha} + \frac{b}{\sin^2 \beta(\alpha)} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad (3.2)$$

яке разом з умовою мінімальності (1) означає:

$$\cos(\alpha) = \cos \beta(\alpha),$$

Тобто рівність  $\alpha$  і  $\beta$ .

Далі неважко знайти самі значення  $\alpha_{\text{min}}$ ,  $t_{\text{min}}$  через задання величин  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Однак зараз для нас важливо інше – умова мінімальних затрат часу привело до вибору відповідної траєкторії за правилом «кут падіння рівний куту відбиття». Але навіть такому закону підкоряється і хід світлового променя, падаючого на відбивальну поверхню! Можливо, і в загальному випадку промені світла рухаються по траєкторіям, забезпечуючи найшвидше попадання сигналу з однієї точки в іншу? Саме так і відбувається згідно відомому варіаційному



принципу Ферма, спираючись на який, можливо отримати всі основні закони геометричної оптики.

Покажемо це, розглянувши заломлення променів на границі двох середовищ (рис. 3.2). Світло, яке виходить із точки А, рухається в першому середовищі зі швидкістю  $v_a$ , заломлюється і, переходячи через лінію розділу, рухається

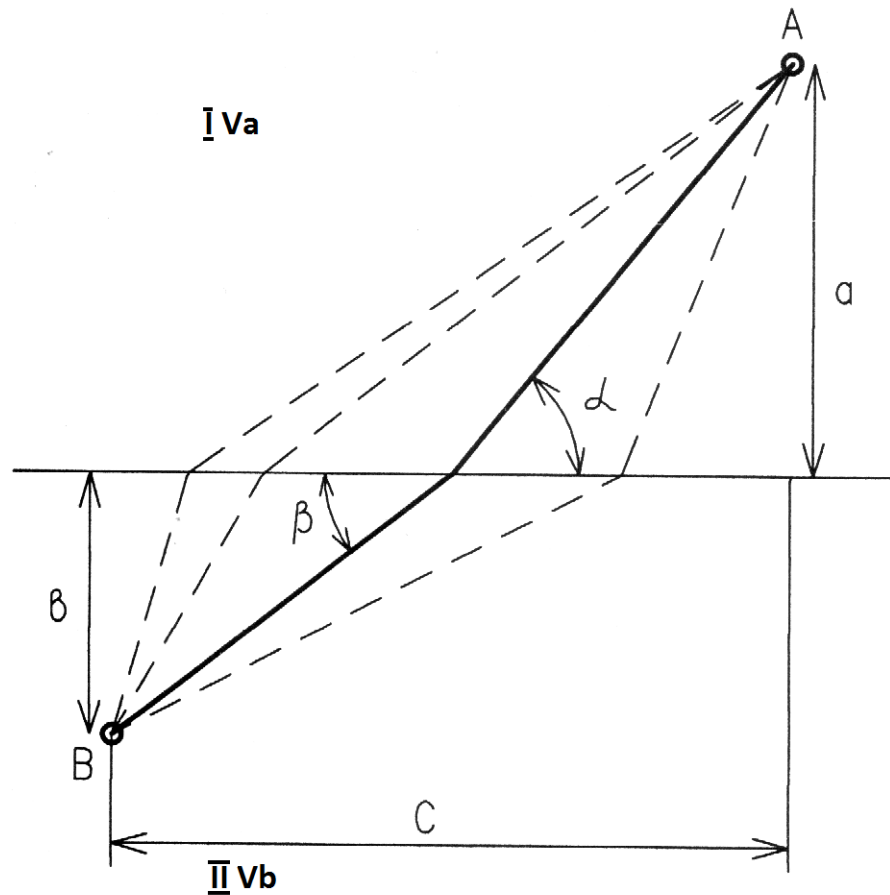


Рис. 3.2. Можливі траєкторії світлових променів, що ідуть із точки А в точку В і заломлюються на лінії С – границя розділу двох середовищ

Товстою лінією виділена траєкторія, яка відповідає закону заломлення  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{V_a}{V_b}$  в другому середовищі зі швидкістю  $V_b$  і потрапляє в точку В. Якщо  $\alpha$  – кут падіння променя, а  $\beta(\alpha)$  – кут його заломлення, то час проходження із середовищ А в В рівний:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v_a \sin \alpha} + \frac{b}{v_b \sin \beta(\alpha)}$$

Умова мінімальності  $t(\alpha)$  записуємо у вигляді (пор. з (3.1)):

$$\frac{a \cdot \cos \alpha}{V_a \sin^2 \alpha} + \frac{b \cdot \cos \beta(\alpha)}{V_b \sin^2 \beta(\alpha)} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

а диференційована по  $\alpha$  умова постійності величини, яка як і колись виражається формулою (3.2). Тут величини  $a$ ,  $b$ ,  $c$  мають той же сенс, що і попередній випадок. Виключаючи із останньої формули похідну  $d\beta/d\alpha$ , приходимо до рівності

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{v_a}{v_b}, \quad (3.3)$$

тобто до відомого закону заломлення світла.

Сформульоване застосовується до будь-якого класу явищ, варіаційні принципи дозволяють однаково будувати відповідні математичні моделі. Їх універсальність виражається також в тому, що, використовуючи їх, можливо в певній мірі відволіктись від конкретного природного процесу. Так, водій автомобіля, який слідує принципу «мінімального часу» і бажаючи потрапити із точки А, що знаходиться на піщаному ґрунті (одна швидкість), в точку В, що розміщена на трав'янистому лузі (інша швидкість), зобов'язаний поїхати не по прямій, яка з'єднує А і В, а по ламаній траєкторії, зробивши необхідне «заломлення» на лінії, що розділяє пісок і трава.

### 3.2 Застосування аналогії при побудові моделей.

У великому числі випадків при спробі побудувати модель будь-якого об'єкта або неможливо прямо вказати фундаментальні закони або варіаційні принципи, яким він підкоряється, або, з точки зору наших сьогоднішніх знань, взагалі немає впевненості в існуванні подібних законів, що допускають

математичне формулювання. Одним із плідних підходів до такого роду об'єктів являється використання аналогій з вже вивченими явищами. Що, здавалось би, спільного між радіоактивним розпадом і динамікою популяції, частково зміна чисельності населення нашої планети? Однак на простішому рівні така аналогія цілком проглядається, про що свідчить одна із простіших моделей популяції називається моделлю Мальтуса. В його основу покладено просте твердження – швидкість зміни населення з часом  $t$  пропорційна його поточній чисельності  $N(t)$ , помноженій на суму коефіцієнтів народжуваності  $\alpha(t) \geq 0$  и смертності  $\beta(t) \leq 0$ . В результаті приходимо до рівняння:

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t) \quad (3.4)$$

Це рівняння схоже на рівняння радіоактивного розкладу і співпадає з ним при  $\alpha < \beta$  (якщо  $\alpha$  і  $\beta$  постійні). Це недивно, так як при їх виведенні використовується однакові міркування.

Інтегрування рівняння (3.4) дає:

$$N(t) = N_0 \exp\left(\int_{t_0}^t [\alpha(t) - \beta(t)] dt\right),$$

де  $N(0) = N(t=t_0)$  - початкова чисельність.

На рис. 3.3 приведені графіки функції  $N(t)$  при постійних  $\alpha$  и  $\beta$  (різним подібним одна одній кривим відповідають різні  $t_0$  - значення часу початку процесу). При  $\alpha = \beta$  чисельність залишається постійною, тобто в цьому випадку рішенням рівняння являється рівноважна величина  $N(t) = N(0)$ .

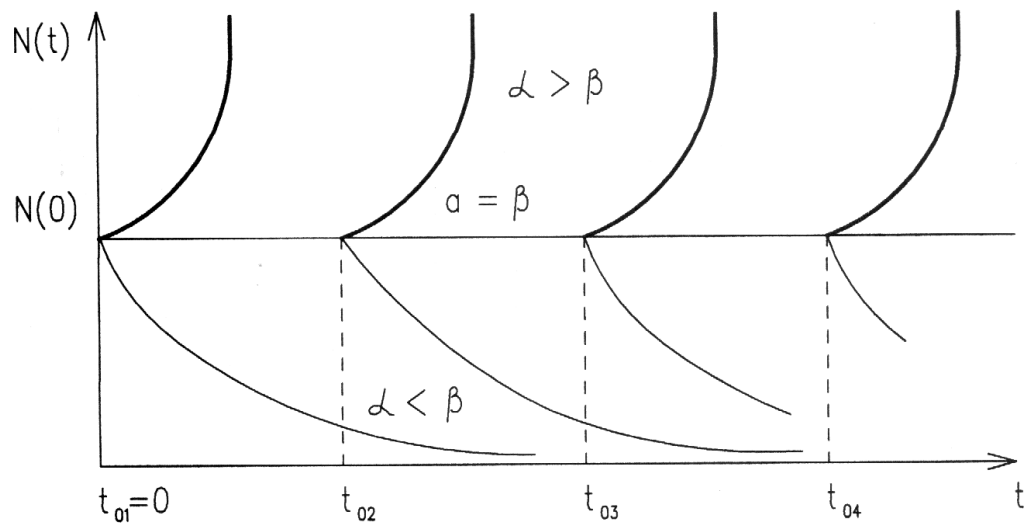


Рис. 3.3. Зміна чисельності популяції з часом в моделі Мальтуса

Рівновага між народжуваністю і смертністю нестала в тому сенсі, що навіть невелике порушення рівності  $\alpha = \beta$  приводить з плином часу до все більшого відхилення функції  $N(t)$  від рівноважного значення  $N(0)$ . При  $\alpha < \beta$  чисельність населення зменшується і прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , а при  $\alpha > \beta$  зростає за деяким експоненційним законом, перетворюючись в безкінечність при  $t \rightarrow \infty$ . Остання обставина і послужило основою для опису Мальтуса про майбутнє перенаселення Землі з усіма наслідками.

Як в даному прикладі, так і в ряді розглянутих вище випадків можливо вказати немало очевидних обмежень застосування побудованій моделі. Звичайно ж, складний процес зміни чисельності населення, залежний до того ж від свідомого втручання самих людей, не може описуватись якими-небудь простими закономірностями. Навіть в ідеальному випадку ізолюваної біологічної популяції запропонована модель не відповідає реальності в повній мірі хоча б через обмеженість ресурсів, необхідних для її існування.

Зроблене зауваження тим не менш анітрохи не зменшує ролі аналогій у побудові математичних моделей дуже складних явищ. Застосування аналогій засновано на одній з найважливіших властивостей моделей - їх універсальності, тобто їх приналежності до об'єктів принципово різної природи. Так, припущення типу «швидкість зміни величини пропорційна значенню самої

величини (або деякої функції від неї)» широко використовується в далеких один від одного областях знань.

### 3.3 Про нелінійності математичних моделей.

Простота розглянутих вище моделей багато в чому пов'язана з їх лінійністю. В математичному плані це важливе поняття означає, що справедливим є принцип суперпозиції, тобто будь-яка лінійна комбінація розв'язання (наприклад, їх сума) також є розв'язанням задачі. Користуючись принципом суперпозиції, не важко, знайшовши розв'язок в якомусь окремому випадку, побудувати розв'язок в більш загальній ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна судити за властивостями окремих випадків - відмінність між двома розв'язками носить лише кількісний характер. Наприклад, збільшення в два рази швидкості витікання ракетного палива веде також до двократного збільшення швидкості ракети, зменшення кута падіння світлового променя на поверхню, що відбивається означає таку ж зміну кута відбиття і т. д. Іншими словами, у разі лінійних моделей відгук об'єкта на зміну якихось-то умов пропорційний величині цієї зміни.

Для нелінійних явищ, математичні моделі яких не підкоряються принципу суперпозиції, знання про поведінку частини об'єкта ще не гарантує знання поведінки всього об'єкта, а його відгук на зміну умов може якісно залежати від величини цієї зміни. Так, зменшення кута падіння променя світла на границю розділу двох середовищ приводить до зменшення кута заломлення, але тільки до певної межі. Якщо кут падіння стає менше критичного (див. формулу (9)), то відбувається якісна зміна - світло перестає проникати через границю розділу в друге середовище, якщо воно менш щільне, ніж перше. Тим самим заломлення світла - приклад нелінійного процесу. Більшість реальних процесів і відповідних їм математичних моделей нелінійні. Лінійні ж моделі

відповідають окремим випадкам і, як правило, служать лише першим наближенням до реальності. Наприклад, популяційні моделі відразу стають нелінійними, якщо взяти до уваги обмеженість доступних популяції ресурсів. При їх виведення вважається, що:

1) існує «рівноважна» чисельність популяцій  $N_p$ , яку може забезпечити навколишнє середовище;

2) швидкість зміни чисельності популяції пропорційна самій чисельності, помноженій (на відміну від моделі Мальтуса) на величину її відхилення від рівноважного значення, тобто

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{N}{N_p}\right) N, \dots \alpha > 0 \quad (3.5)$$

Член  $(1 - N/N_p)$  в цьому рівнянні забезпечує механізм «насичення» чисельності – при  $N < N_p$  ( $N > N_p$ ) швидкість росту позитивна (негативна) і наближається до нуля, якщо  $N \rightarrow N_p$ .

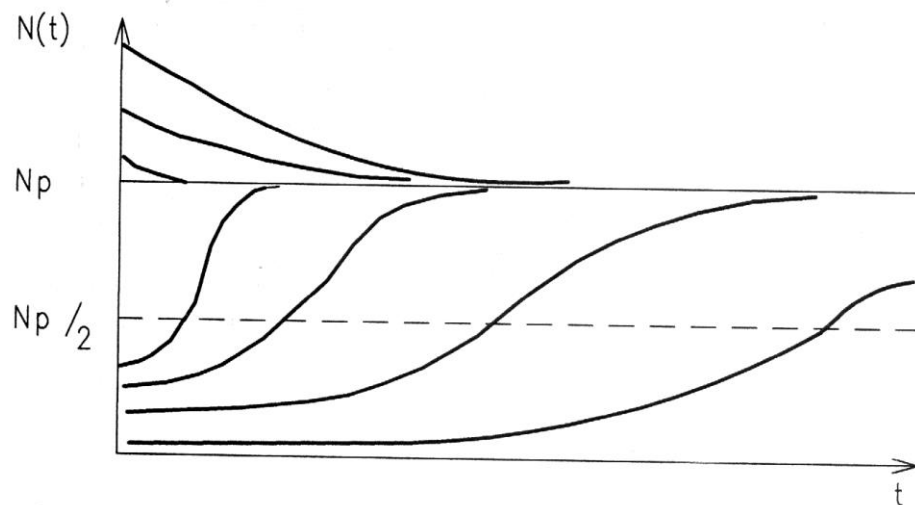


Рис. 3.4. Логістичні криві, які відповідають різним значенням початкової чисельності  $N(0)$

Представляючи рівняння (3.5) у вигляді:

$$\frac{dN}{N_p - N} + \frac{dN}{N} = \alpha dt$$

Інтегруючи його, отримуємо:

$$-\ln(N_p - N) + \ln N = \alpha t + C.$$

Постійна інтегрування визначається з умови  $N(t=0) = N(0)$ , тобто:

$$C = \ln\left(\frac{N(0)}{N_p - N(0)}\right)$$

У результаті знаходимо:

$$N = N_p \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t} - N \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t}$$

Або в кінцевому вигляді,

$$N(t) = \frac{N_p N(0) e^{\alpha t}}{N_p - N(0)(1 - e^{\alpha t})}.$$

Поведінка функції  $N(t)$  описується так званою логістичною кривою (рис.3.4). При будь-якому  $N(0)$  чисельність наближається до рівноважного значення  $N_p$ , причому тим повільніше, чим величина  $N(t)$  ближче до  $N(0)$ , тим самим рівновага, на відміну від випадку моделі (4), є стійкою.

Логістична модель більш реалістично відображає динаміку популяції в порівнянні з моделлю Мальтуса, але сама вона за необхідністю стає нелінійною і тому більш складною. Зауважимо, що припущення про механізми насичення використовуються при побудові багатьох моделей в різних галузях знань.

### 3.4 Попередні висновки

Процес побудови моделей може бути умовно розбитий на наступні етапи.

1. Конструювання моделі починається зі словесно-сміслового опису об'єкта чи явища. Крім відомостей загального характеру про природу об'єкта і ланцюгах його дослідження (невагомий стрижень, товстий шар речовини,

прямолінійне поширення світлових променів і т. д.). Даний етап можна назвати формулюванням перед моделюванням.

## 2. Наступний етап - завершення ідеалізації об'єкта.

Відкидаються всі фактори і ефекти, які представляються не найсуттєвішими для його поведінки. Наприклад, при складанні балансу матерії не враховувався, зважаючи на його малості, дефект мас, яким супроводжується радіоактивний розпад. По можливості ідеалізовані припущення записуються в математичній формі (подібно умові  $\lambda_1 \gg L_1$ ), з тим, що б їх справедливість піддавалася кількісному контролю.

3. Після виконання перших двох етапів можна переходити до вибору чи формулюванню закону (варіаційного принципу, аналогії і т.п.), якому підкоряється об'єкт, та його запису у математичній формі. При необхідності використовуються додаткові відомості про об'єкт, що також записуються математично (наприклад, постійність величини  $c$  для всіх траєкторій промінів світла, з геометрії задача). Треба мати на увазі, що навіть для простих об'єктів вибір відповідного закону аж ніяк не тривіальна задача.

4. Завершує формулювання моделі її «оснащення». Наприклад, необхідно задати відомості про початковий стан об'єкта (швидкість ракети та її масу в момент  $t = 0$ ) або інші його характеристики (величини  $\alpha(t)$  та  $\beta(t)$ ), без знання яких неможливо визначити поведінку об'єкта. І, нарешті, формується мета дослідження моделі (знайти закон заломлення світла, досягти розуміння закономірностей зміни популяції, визначити вимоги до конструкції ракети, що запускає супутник, і т.д.).

5. Побудована модель вивчається усіма доступними досліднику методами, в тому числі з взаємною перевіркою різноманітних підходів. На відміну від найпростіших випадків, більшість моделей не піддаються чисто теоретичному аналізу, й тому необхідно широко застосовувати обчислювальні методи. Ця обставина особливо важлива при вивченні нелінійних об'єктів, так як їх кількісна поведінка заздалегідь, як правило, невідома.



6. В результаті дослідження моделі не тільки досягається поставлена мета, але й повинна бути встановлена усіма можливими способами (порівнянням з практикою, співставленням з іншими підходами) її адекватність – відповідність об'єкту й сформульованим припущенням. Неадекватна модель може дати результат, як завгодно відмінний від істинного, і повинна бути або відкинута, або відповідним образом модифікована.

### 3.5 Лінійні рівняння першого порядку

#### 1. Рівняння

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (3.6)$$

називається лінійним. Щоб його вирішити, треба спочатку вирішити рівняння:

$$y' + a(x)y = 0 \quad (3.7)$$

(це робиться шляхом розділу змінних, див. § 2) й в загальному рішенні останнього замінити довільну стару  $C$  на невідому функцію  $C(x)$ . Потім вираз, отриманий для  $y$ , підставити у рівняння (1) й знайти функцію  $C(x)$ .

2. Деякі рівняння стають лійними, якщо змінити місцями шукану функцію й незалежну змінну. Наприклад, рівняння  $y = (2x + y^3)y'$ , в якому  $y$  є функцією від  $x$ , - нелінійне. Запишемо його у диференціалах:  $ydx - (2x + y^3)dy = 0$ . Так як в це рівняння  $x$  і  $dx$  входять лінійно, то рівняння буде лінійним, якщо  $x$  вважати шуканою функцією, а  $y$  - незалежною змінною. Це рівняння може бути записане у вигляді:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2 \quad (3.8)$$

Далі вирішується аналогічно (3.6).

#### 3. Щоб вирішити рівняння Бернуллі, тобто рівняння

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 1),$$

треба обидві його частини розділити на  $y^n$  і зробити заміну  $1/y^{n-1} = z$ . Після заміни виходить лінійне рівняння, яке можна вирішити викладеним вище способом.

#### 4. Рівняння Ріккаті, тобто рівняння

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

в загальному випадку не вирішується в квадратурах. Якщо ж відомо один частинний розв'язок  $y_1(x)$ , то заміною  $y = y_1(x) + z$  рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі й таким чином може бути вирішено в квадратурах.

Іноді частинний розв'язок вдається підібрати, виходячи з виду вільного члена рівняння (члена, що не містить  $y$ ). Наприклад, для рівняння  $y' + y^2 = x^2 - 2x$  в лівій частині будуть члени, подібні членам правої частини, якщо взяти  $y = ax + b$ . Підставляючи в рівняння й прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах, знайдемо  $a$  і  $b$  (якщо частинний розв'язок вказаного виду існує, що зовсім не завжди існує). Інший приклад: для рівняння  $y' + 2y^2 = 6/x^2$  ті самі міркування спонукають нас шукати частинний розв'язок у вигляді  $y = a/x$ . Підставляючи  $y = a/x$  в рівняння, знайдемо сталу  $a$ .

### 3.6 Завдання

1.  $xy' - 2y = 2x^4$
2.  $(2x+1)y' = 4x + 2y$
3.  $y' + y \cdot \operatorname{tg}(x) = \sec(x)$
4.  $(xy + e^x)dx - xdy = 0$
5.  $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$

## 4. ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

### 4.1 Схеми застосування математики

Спираючись на реальний об'єкт формуються основні властивості, що цікавлять дослідника, а також враховуються, зв'язані з ними інші якості, які можна описати мовою тієї чи іншої науки, інакше кажучи будуємо модель об'єкта. Таку модель називають **змістовною**.

При побудові змістовної моделі формуються відповідні **гіпотези (постулати моделі)**. Включення моделі в ту чи іншу науку дає можливість застосовувати закони та інші ствердження, що встановлені в цій науці. Звичайно, що при побудові змістовної моделі до уваги не приймають різного роду не ідеальності, неправильності реального об'єкта, що досліджується.

На основі змістовної моделі записуються відповідні рівняння або будь-яким іншим способом переводять її на формальну математичну мову і тим самим переходять до математичної моделі. Таким чином математика застосовується не безпосередньо до реального об'єкта, а до його математичної моделі.

Для дослідження математичної моделі, простіше кажучи — розв'язання отриманої математичної задачі, обирається метод цього розв'язання та його реалізація; сюди входить проведення усіх необхідних обрахунків, у тому числі і на ЕОМ. При цьому всі елементи математичної моделі (зокрема, всі залучені величини) є ніби мітками відповідних реальних елементів. Це дає можливість у процесі розв'язання математичної задачі залучати додаткові відомості, які можуть спростити цей процес, або виділити з декількох розв'язків той, який потрібен.

Отримавши розв'язок математичної задачі, необхідно його проаналізувати, розібратись в його реальній суті, зробити висновки, тобто **інтерпретувати** (розтлумачити) результати дослідження математичної моделі. Сюди ж може входити контроль правильності (як кажуть, верифікація, від

латинських слів *verus* «верус» — істинна та *facio* «фаціо» — роблю) моделі на основі порівняння результату з іншими відомими фактами, зокрема з експериментальними даними

#### 4.2 Множинність та єдність моделей

Реальний об'єкт може мати декілька нерівнозначних математичних моделей. Це перш за все зв'язано з необхідністю дослідження різних систем  $S_1, S_2, \dots$  його властивостей. Але навіть принципово різні математичні моделі реального об'єкта, що розглядається, можуть з'явитись і при дослідженні однієї і тієї ж систем. Так, об'єкт можливо описувати за допомогою як неперервної, так і дискретної моделі, як детермінованої, так і стохастичної. Вибір типу моделі, досить суттєвий для напряму дослідження, може природно підказуватись об'єктом, що моделюється або розумними традиціями, однак і тоді корисно мати на увазі можливість змінити цей тип. (Між тим, нерідко тип моделі обирається з сліпого імітування або визначається прогалинами в освіті дослідника). Для складного реального об'єкта порівняння результатів його дослідження за допомогою моделей різного типу може збагатити знання про нього, а також значно підвищити їх достовірність.

Побудова різних моделей одного й того ж об'єкту може мати на меті різну точність, деталізацію його властивостей.

Загальні риси математичної моделі проявляються вже при формулюванні змістовної моделі об'єкта, що досліджується. Однак і після цього звичайно бувають можливі різні видозміни математичної моделі: в рівняннях можна відкидати будь-які члени або вводити нові, нелінійні залежності замінити лінійними і навпаки, ускладнювати чи спрощувати геометричні форми тощо.

Можлива і зворотна ситуація: різноманітні реальні об'єкти чи різні змістовні моделі можуть мати одну й ту ж математичну модель — наприклад,

описуватись однаковими диференціальними рівняннями. Так, неважко показати, що сила  $j = j(t)$  електричного току, збудженого в деякий момент у замкнутому контурі, який послідовно містить опір  $R$ , індуктивність  $L$  та ємність  $C$ , задовольняє рівняння

$$L \frac{d^2 j}{dt^2} + R \frac{dj}{dt} + \left(\frac{1}{C}\right)j = 0.$$

Це рівняння з точки зору математики співпадає з рівнянням

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

яке описує коливання вантажу маси  $m$  на горизонтальній площині під дією пружини нульової маси з жорсткістю  $k$ , з урахуванням в'язкого тертя, при якому протидіюча сила пропорційна швидкості з малим коефіцієнтом тертя  $f$ .

Позначення та фізичний зміст величин, що присутні в цих рівняннях, з точки зору математики не істотні. Те ж рівняння при іншому смислі букв описує різноманітні **осцилятори** (від латинського *oscillo* «осціло» — гойдаюсь) — коливальні системи будь-якої природи.

Тому, дослідивши математичну модель, можна часто робити висновки про властивості різноманітних об'єктів. Окрім того, якщо різні об'єкти мають однакову математичну модель, то стає можливим моделювати один з об'єктів іншим. Наприклад, замість дослідження коливань складної лінійної механічної системи можна проводити вимірювання у відповідно підібраному електричному колі, що має ту ж математичну модель. На цьому основана дія електромеханічних, оптомеханічних та інших аналогових пристроїв. Чудово, що при використанні таких пристроїв сама математична модель немов би залишається осторонь (значення інтересуючи нас механічних величин отримуються безпосередньо за результатами електричних вимірювань), хоча саме на єдності моделі ґрунтується можливість цього застосування.

Вміння правильно вибрати математичну модель з вже відомих або, тим більше, побудувати таку потребує необхідних математичних і спеціальних знань і відповідних навичок.

#### 4.3 Вимога адекватності

Найважливіша вимога до математичної моделі є вимога її **адекватності** (правильній відповідності) вивчаємого реального об'єкта відносно вибраної системи його властивостей. Під цим у першу чергу розуміють:

1) правильний якісний опис досліджуваного об'єкту: наприклад, можливість на основі дослідження моделі зробити правильний висновок про напрям змін будь-яких кількісних характеристик цих властивостей, про їх взаємозв'язок, про характер коливань об'єкту, про стійкість його стану чи еволюції тощо.

Крім того, у вимогу адекватності звичайно входить:

2) правильний кількісний опис цих властивостей з деякою розумною точністю.

Згідно з тим, ставиться умова 2) чи ні, говорять відповідно про **кількісну** або **якісну** модель. Замість кількісної адекватності говорять також про **точність моделі**.

В сферах, ще не підготовлених для використання розвинених кількісних математичних методів, або в тих сферах, де кількісні закономірності проявляються не зовсім чітко (наприклад, в деяких соціальних або біологічних науках), математичні моделі є, зазвичай, за необхідністю лише якісними. Навіть в техніці, де використання математики відомо дуже давно, модель може виявитись лише якісною через об'єкт, що вивчається. Однак і тоді виявлення на моделі суттєвих властивостей цього об'єкту допомагає правильно орієнтуватись.

Звичайно говорять не просто про адекватність моделі, але також про більшу чи меншу адекватність. Наголосимо, що цю адекватність треба розглядати тільки за конкретними ознаками — властивостями, прийнятими в

даному дослідженні за основні. Якщо вони явно не вказані, то повинні матись на увазі чи уточнюватись за ходом дослідження.

Для коливальної системи (рис.4.1) диференціальне рівняння виходить з другого закону Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

з загальним розв'язком

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

Де  $C_1, C_2$  — довільні сталі, що визначаються з початкових умов.

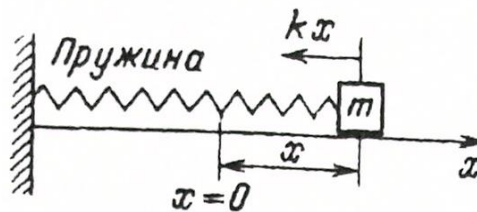


Рис. 4.1. Маса  $m$  коливається на горизонтальній площині

Під дією пружини з жорсткістю  $k$ .

Точка відліку відповідає положенню рівноваги.

При повільному затуханні ця модель адекватна по відношенню до частоти коливань та в визначеній мірі до характеру коливань, так як на невеликому інтервалі часу затуханням коливань можна знехтувати.

Однак, якщо розглядати швидкість цього затухання (нехай мала, але все ж існуюча), то наведена модель неадекватна, а як адекватну модель потрібно взяти рівняння

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Забування того, що всіляка адекватність математичної моделі реальному об'єкту тільки відносна і має свої рамки застосування, може привести (и не раз

приводило) до грубих помилок, оснований на безконтрольному приписуванні реальному об'єкту властивостей цієї моделі.

В більш складних випадках неадекватність або низька адекватність моделі буває не настільки виразною, і ми можемо говорити про адекватність лише з деякою часткою впевненості. Ця впевненість збільшується, якщо наслідки з прийнятої моделі добре погоджуються з надійно встановленими фактами і фізичним експериментом.

Доволі часто буває, що модель, побудована для вивчення деяких властивостей об'єкта, адекватність якої встановлена по відношенню до цих властивостей, виявляється адекватною і по відношенню до якихось інших властивостей. Це недивно, особливо якщо модель виводиться з добре перевірених фізичних законів і використовуваних в крузі питань, що вивчаються як способи прикладної математики. Тому, кажучи о математичній моделі і її адекватності, часто не згадують про те, які саме властивості об'єкта моделюються. В цьому немає біди, якщо не втрачати пильності і не забувати про принципову обмеженість області можливого застосування будь-якої математичної моделі.

#### 4.4 Вимоги достатньої простоти.

Якщо орієнтуватися тільки на вимогу адекватності, то необхідно віддавати перевагу складним моделям перед простим. Насправді, ускладнюючи модель, ми можемо врахувати більшу кількість факторів, які можуть так або інакше вплинути на властивості, що вивчаються. В нестандартних, ситуаціях надмірне ускладнення моделі може привести до громіздких систем рівнянь, що не піддаються вивченню і розв'язку.

Таким чином, ми приходимо до вимоги **достатньої простоти моделі** по відношенню до системи її властивостей, що вивчаються. А саме: модель є



достатньо простою, якщо засоби вивчення, що маються у нашому розпорядженні (зокрема, обчислювані) дають можливість провести в прийнятні строки і економно по витратам праці і засобів, але з розумною точністю, якісно або кількісно — в залежності від постановки задачі — аналіз досліджуваних властивостей і осмислити результат.

Ясно, що вимога простоти моделі в якомусь сенсі протиставлена вимозі її адекватності: як правило, чим модель більш адекватна, тим вона менш проста і тим важче її аналіз. (Втім, нерідкі випадки, коли ускладнення моделі може знизити її адекватність: так буває, наприклад, якщо при виписуванні додаткових рівнянь залучаються параметри, відомі з дуже низькою точністю, або якщо самі ці рівняння сумнівні). Тому часто буває, що, вибравши модель, доводиться її спрощувати, тобто переходити до нової моделі. При цьому можна спрощувати, або змістовну модель об'єкта, або її математичну модель. Досвідчений фахівець зазвичай йде по першому шляху, так як при цьому залишаються виконаними найбільш істотні фізичні співвідношення і більш ясні постулати моделі.

#### 4.5 Деякі інші вимоги

Суттєвою є також властивість повноти математичної моделі, що складається в тому, що ця модель дає принципову можливість за допомогою математичних методів отримати твердження, що нас цікавлять. Так для коливальної моделі, якщо не враховувати в'язке тертя, то для визначення частоти коливань ця модель є повною, а для визначення амплітуди — неповною, оскільки для останнього потрібні додаткові дані.

Ще одна важлива вимога до математичної моделі її *продуктивність*. Вона пов'язана з тим, що досліджуваний об'єкт може включати різні параметри — такі, як маси, довжини тощо. Її компоненти, включають функціональні

залежності, які вважаються заданими і описують зв'язки між розглянутими величинами (наприклад, зв'язок між зусиллям і переміщенням в разі нелінійного закону пружності). Всі ці параметри і залежності, що задаються називаються *вихідними даними* моделі, впливають на значення величин, одержуваних в результаті розв'язання математичної задачі. Згадана вимога полягає в тому, щоб в реальних ситуаціях вихідні дані можна було б дійсно вважати заданими, тобто щоб їх можна було б якось виміряти, або підрахувати, або знайти в довідниках тощо. При цьому, якщо мова йде про виміри, то вихідні дані повинні легше піддаватися вимірюванню, ніж одержувані, так як в протилежному випадку втрачається сенс дослідження моделі.

Якщо реально отримати вихідні дані складно, то після вивчення математичної моделі ми дізнаємося тільки, якими властивостями можуть володіти об'єкти з розглянутим класом, але деколи властивості даного нас конкретного об'єкта залишаються неясними. Цьому питанню не завжди приділяється достатня увага, що істотно знижує прикладну значимість багатьох досліджень.

Відзначимо вимога *робастності* (від лат. Robust «робаст» — міцний) моделі, тобто її стійкість щодо похибок у початкових даних. Завжди слід мати на увазі, що ці дані можуть бути відомі лише з більшою або меншою точністю і така невизначеність не повинна суттєво впливати на результат дослідження. Є ряд правил, що сприяють цій стійкості. Так слід уникати віднімання близьких один одному наближених значень величини, тому що при такому відніманні відносна похибка різко зростає. Нехай, наприклад, маємо  $\hat{a} = 275,1 \pm 0,1$  і  $\hat{a} = 272,3 \pm 0,1$ ; тоді  $\hat{a} - \hat{a} = 2,8 \pm 0,2$ . Тут  $\hat{a}$  і  $\hat{a}$  відомі з точністю до 0,04% а  $\hat{a} - \hat{a}$  — до 7%; точність знизилась в 20 раз. Слід враховувати можливість нестійкості моделі. Нестійкість математичної моделі може вийти через включення в неї функцій, що швидко змінюються на ділянці, де значення аргументу відоме лише з невисокою точністю.

Бажаним, хоча і не обов'язковим є властивість **наочності** математичної моделі. Під цим звичайно розуміють більш чи менш безпосередній, ясний

змістовний сенс її компонент, який дає можливість не тільки зайвий раз проконтролювати модель, але деколи і намітити план розв'язання математичної задачі, а також орієнтовно передбачати результат рішення, що може суттєво

прискорити процедуру. Так, в рівнянні  $m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0$  послідовні складові — це (з протилежним знаком) сили інерції, терті і пружності, а саме рівняння є записом для розглянутої системи відомого принципу механіки: сума всіх сил, діючих на тіло (включаючи сили інерції), дорівнює нулю.

## 4.6 Матеріали для повторення

### 4.6.1 Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

#### 1. Рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

називається рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції  $F(x, y)$ . Це має місце, якщо  $\frac{dM}{dy} \equiv \frac{dN}{dx}$ . Щоб розв'язати рівняння (1), необхідно знайти функцію  $F(x, y)$ , від якої повний диференціал  $dF(x, y) = F'_x dx + F'_y dy$  дорівнює лівій частині рівняння (1). Тоді загальний розв'язок рівняння (1) можна написати в виді  $F(x, y) = C$ , де  $C$  — довільна стала.

*Приклад.* Розв'язати рівняння

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

Так як  $\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2$ , то рівняння (2) є рівнянням в повних диференціалах. Знайдемо функцію  $F(x, y)$ , повний диференціал якої  $dF(x, y) = F'_x dx + F'_y dy$  дорівнював би лівій частині рівняння (2), тобто таку функцію  $F$ , що

$$F'_x = 2x + 3x^2y, \quad F'_y = x^3 - 3y^2. \quad (3)$$

Інтегруємо по  $x$  перше з рівнянь (3), вважаємо  $y$  сталою; при цьому замість сталої інтегрування необхідно поставити  $\varphi(y)$  — невідому функцію від  $y$ :

$$F = \int (2x + 3x^2 y) dx = x^2 + x^3 y + \varphi(y).$$

Підставляючи цей вираз для  $F$  в друге з рівнянь (3), знайдемо  $\varphi(y)$ :

$$(x^2 + x^3 y + \varphi(y))'_y = x^3 - 3y^2; \quad \varphi'(y) = -3y^2; \quad \varphi(y) = -y^3 + \text{const}.$$

Отже, можна взяти  $F(x, y) = x^2 + x^3 y - y^3$ , і загальний розв'язок рівняння (2) буде мати вигляд

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

## 2. Інтегруючим множником для рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

називається така функція  $m(x, y) \neq 0$ , після множення на яку рівняння (4) перетворюється на рівняння в повних диференціалах. Якщо функції  $M$  і  $N$  в рівнянні (4) мають безперервні часткові похідні і не звертаються в нуль одночасно, то інтегруючий множник існує. Однак немає загального методу для його вирішення (коли загальний розв'язок рівняння (4) невідомо).

Для вирішення деяких рівнянь можна застосовувати метод повних диференціалів, використовуючи відомі формули:

$$d(xy) = yd + xdy, \quad d(y^2) = 2ydy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y} \text{ і т.д.}$$

*Приклад.* Розв'язати рівняння

$$ydx - (4x^2 y + x)dy = 0. \quad (5)$$

Спочатку виділяємо групу членів, що представляють собою повний диференціал. Так як  $ydx - xdy = -x^2 d(y/x)$ , то, якщо розділити рівняння (5) на  $-x^2$ , маємо

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4ydy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0.$$

Це — рівняння в повних диференціалах. Інтегруючи безпосередньо (приводити до виду (1) не потрібно), отримуємо рішення

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C.$$

Крім того, при діленні на  $-x^2$  було втрачено розв'язок  $x=0$ .

*Зауваження.* Так як після ділення рівняння (5) на  $-x^2$ , тобто множення на  $-1/x^2$ , вийшло рівняння в повних диференціалах, то інтегруючий множник для рівняння (5) дорівнює  $-1/x^2$ .

3. Якщо в рівнянні (4) можна виділити повний диференціал деякої функції  $\varphi(x, y)$ , то іноді рівняння спрощується, якщо від змінних  $(x, y)$  перейти до змінних  $(x, z)$  або  $(y, z)$ , де  $z = \varphi(x, y)$ .

*Приклади.* 1) Розв'язати рівняння  $ydx - (x^3y + x)dy = 0$ .

Виділивши повний диференціал як в попередньому прикладі, отримаємо

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + xydy = 0.$$

Перейшовши до змінних  $z = y/x$  і  $y$ , одержимо рівняння

$$dz + \frac{y^2}{z} dy = 0,$$

яке легко розв'язується.

2) Розв'язати рівняння  $(xy + y^4)dx + (x^2 - xy^3)dy = 0$ .

Згрупуємо члени так, щоб виділити повні диференціали

$$x(ydx + xdy) + y^3(ydx - xdy) = 0, \quad xd(xy) + y^5d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Розділивши на  $x$  і зробивши заміну  $xy = u$ ,  $x/y = v$ , одержимо рівняння  $du + \frac{u^2}{v^3} dv = 0$ , яке легко розв'язується.

#### 4.6.2 Завдання

1.  $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$

2.  $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

3.  $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

4.  $(x^2 + 2x + y)dx = (x - 3x^2y)dy$

## 5. ТИПИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

### 5.1 Структурні та функціональні моделі.

Зазвичай у математичній моделі відображається структура (устрій) об'єкта, що моделюється, та істотні для цілей дослідження властивості й взаємозв'язки компонентів цього об'єкта; така модель називається *структурною*. Якщо ж ця модель відображає лише те, як об'єкт функціонує – наприклад, як він реагує на зовнішні впливи, – то вона називається *функціональною* або, образно, *чорною скринькою*. Можливі й моделі комбінованого типу. Розглянемо приклад. Нехай на платформі маси  $m_1$  пружно закріплений вантаж маси  $m_2 \ll m_1$  (тобто  $m_2$  значно менше  $m_1$ ; рис. 5.1). Платформа, зіткнувшись зі стінкою, під дією буфера відкочується назад. Нас цікавить залежність амплітуди  $A$  коливань вантажу після взаємодії платформи зі стінкою від швидкості  $v$  накатування платформи. Жорсткості  $k_1$  буфера і  $k_2$  пружного закріплення вважаємо заданими; силами тертя і урахуванням обертowego руху коліс нехтуємо.

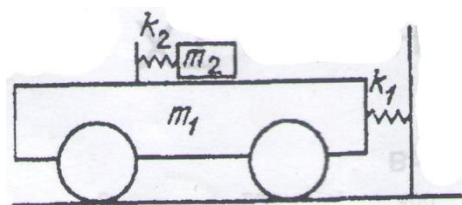


Рис. 5.1 Схема задачі

Будемо відраховувати час  $t$  від моменту зіткнення і позначимо літерою  $T$  час взаємодії платформи зі стінкою, а символами  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  відповідно координати платформи і вантажу щодо платформи, відлічувані від їх положення при  $t = 0$ . З урахуванням зроблених припущень (зокрема, умови  $m_2 \ll m_1$ ) отримуємо систему диференціальних рівнянь і початкові умови,

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 &= 0, & m_2 \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} + k_2 x_2 &= 0, \\ (0 \leq t \leq T), & & & \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$x_1 = 0, \frac{dx_1}{dt} = v, x_2 = 0, \frac{dx_2}{dt} = 0, (t=0),$$

які і складають математичну модель розглянутої задачі. З рівняння та початкових умов для  $x_1$  знаходимо

$$x_1 = \frac{v}{w_1} \sin w_1 t \left( w_1 := \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \right) T = \frac{\pi}{w_1}$$

(взаємодія зі стінкою закінчується при першому значенні  $t > 0$ , для якого  $x_1 = 0$ ). Підставляючи  $x_1$  в рівняння для  $x_2$ , отримуємо

$$x_2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v \left( \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} - \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right) \left( \omega_2 := \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \right).$$

Звідси при  $t = T$  маємо

$$x_2 = (x_2)_T = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{v}{\omega_2} \sin \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_T = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v \left( 1 + \cos \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi \right).$$

Починаючи з моменту  $t = T$  вантаж здійснює гармонійні коливання з амплітудою  $A$ , яка визначається цими початковими умовами. Із збереження повної (тобто суми потенційної і кінетичної) енергії коливальної системи отримуємо після простих перетворень

$$\frac{k_2}{2} A^2 = \frac{k_2}{2} (x_2)_T^2 + \frac{m_2}{2} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_T^2 = 2k_2 \frac{v}{\omega_2^2} \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right)^2 \cos^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\pi}{2},$$

звідки остаточно

$$A = hv, \text{ де } h := \frac{2}{\omega_2} \frac{\omega_1^2}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|} \left| \cos \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\pi}{2} \right|. \quad (5.2)$$

Таким чином, за допомогою структурної моделі ми отримали явну формулу для коефіцієнта пропорційності між швидкістю платформи і амплітудою коливань вантажу, що виникають після взаємодії платформи зі стінкою. Для кожної конкретної системи подібного типу ми можемо, знаючи значення параметрів  $m_1, m_2, k_1, k_2$ , порахувати значення цього коефіцієнта. Так для

$$m_1 = 10 \text{ т} = 10^4 \text{ кг}, \quad k_1 = 1 \text{ т с} / \text{см} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ н} / \text{м}, \quad (5.3)$$

$$m_1 = 200 \text{ кг}, \quad k_2 = 200 \text{ кг с / см} = 1,96 \cdot 10^5 \text{ н / м},$$

одержуємо  $h = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ , звідки остаточно

$$A (\text{м}) = 1,79 \cdot 10^{-3} v (\text{м/с}),$$

тобто

$$A (\text{см}) = 4,97 \cdot 10^{-2} v (\text{км/г}). \quad (5.4)$$

Останню формулу можна розглядати як функціональну модель розглянутої системи при значеннях (5.3) параметрів. Цю формулу для конкретних значень параметрів можна було б отримати безпосередньо: справді, пропорційність величин  $v$  та  $A$  випливає з лінійності задачі або з аналізу розмірностей (див. п. 4 § 3), а значення коефіцієнта пропорційності  $h$  можна знайти, провівши фізичний експеримент для будь - якого одного значення  $v$ . Проте явний вираз (5.2) коефіцієнта  $h$  через параметри системи може виявитися корисним при її проектуванні.

Відзначимо, що описаний тільки що (другий) спосіб виведення формули (5.4) є прикладом *ідентифікації* математичної моделі. Ця процедура виникає, якщо після вибору схеми моделі потрібно визначити її параметри, уточнити структуру і т.п.

## 5.2 Дискретні і неперервні моделі

Як відомо, величини можуть бути двох типів - дискретні, тобто приймають "відірвані" один від одного значення, що допускають природну нумерацію, і неперервні, що приймають всі значення з деякого інтервалу. Можливий також змішаний випадок, наприклад, коли величина на якомусь інтервалі своїх значень поводить ся, як дискретна, а на іншому - як безперервна. (Ці визначення не є вичерпними, але для нас вони достатні.)

Подібним чином, моделі - як змістовні, так і математичні - можуть бути або дискретними, або безперервними, або змішаними. Між цими типами немає



принципового бар'єра і при уточненні або видозміні моделі дискретна картина може стати безперервною і назад; теж саме може статися в процесі розв'язання математичної задачі. Таким чином, у багатьох задачах при складанні математичної моделі, а також при виборі методу її дослідження треба враховувати можливість застосування як "дискретного", так і "безперервного" апаратів (наприклад, для дискретних моделей характерно застосування сум, а для безперервних - похідних та інтегралів ) незалежно від характеру вихідної картини.

Нехай, наприклад, вивчається прогин балки від вантажу, розташованого на інтервалі порівняно малої довжини. Хоча цей розподіл безперервний, ми можемо без суттєвої помилки, переходячи до моделі, значно спростити картину, замінивши розподілений вантаж зосередженим.

Розглянемо цей перехід більш докладно. Будемо для простоти вважати балку прямолінійною і направимо вісь  $x$  уздовж неї. Тоді, якщо вантаж розподілений з щільністю  $q(x)$  на малому інтервалі  $(l)$ , розташованому поблизу точки  $x = a$ , то після заміни ми отримуємо вантаж зосереджений в цій точці.

$$Q = \int_{(l)} q(x) dx ,$$

Як відомо, такий зосереджений вантаж можна розглядати як розподілений з щільністю

$$q(x) = Q \delta(x - a),$$

де  $\delta$  - дельта - функція Дірака. Такий підхід як би перекидає міст між дискретними і безперервними моделями і, зокрема, дає можливість у разі зосередженого навантаження користуватися формулами, виведеними для навантаження розподіленого.

Описаний перехід особливо доцільний, якщо конкретний вид функції  $q(x)$  нам відомий, але сумарне значення  $Q$  ми знаємо. Аналогічний перехід до дискретної моделі навантаження можна здійснити, якщо є декілька вантажів, кожен з яких розподілений на малому інтервалі.

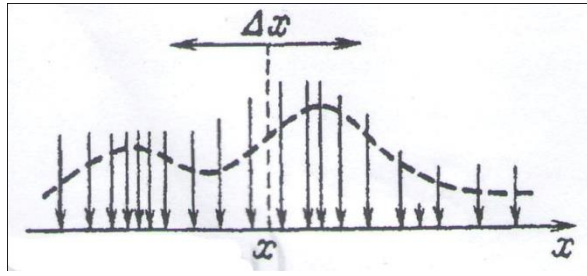


Рис. 5.2 Балка з навантаженням

Але нехай таких вантажів, заміненіх на зосереджені, багато (див. рис. 5.2). Тоді може виявитися зручніше перейти до неперервної моделі навантаження, розподіленої із щільністю, показаної на рис. 5.2 штриховою лінією. Ця щільність виходить за допомогою *осереднення* вихідного розподілу наступним чином. Для кожного значення  $x$  ми підраховуємо навантаження  $Q(x; \Delta x)$ , що припадає на інтервал деякої довжини  $\Delta x$  з центром в точці  $x$ , а потім вважаємо, що щільність  $q(x)$  дорівнює

$$q(x) (= q(x; \Delta x)) = \frac{1}{\Delta x} Q(x; \Delta x).$$

(Звичайно, практично такий підрахунок проводиться лише в якомусь числі точок.) Особливо проста картина виходить, якщо вантажі розташовані періодично з порівняно малим періодом: тоді осереднена щільність постійна.

Епюра щільності навантаження залежить від вибору *інтервалу осереднення*  $\Delta x$ . Яким треба взяти цей інтервал? Неважко зрозуміти, що якщо він повинен бути великий у порівнянні з характерною відстанню між вантажами, але малий у порівнянні з загальною довжиною балки. Наприклад, можна взяти середнє геометричне цих двох величин.

Аналогічна процедура відбувається, коли ми від середовища, що складається з окремих частинок, переходимо за допомогою осереднення до суцільного середовища, параметри якого (щільність, температура і т.п.) розподілені по простору; від поїзда з дискретними вагонами переходимо до його безперервної моделі; від впливу на систему, що має характер частих підштовхування, переходимо до безперервно діючої силі і т.д.

Осереднення застосовується не тільки для переходу від дискретної моделі до безперервної, але також і для спрощення швидко коливних залежностей в неперервних моделях.

Перехід від дискретної моделі до неперервної, так само як і зворотний перехід, може істотно спростити дослідження, але деколи може внести і неадекватність, за чим необхідно слідкувати.

### 5.3 Лінійні та нелінійні моделі

Лінійна залежність однієї величини від іншої - це пропорційність їх збільшень, тобто залежність виду  $y = ax + b$ , звідки отримуємо  $\Delta y = a\Delta x$  ( $\Delta$  - звичайне позначення приросту); аналогічно, лінійна залежність величини від двох інших - це залежність виду  $z = ax + by + c$ , звідки  $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$ , і т.д. Типові лінійні залежності між фізичними величинами - закон Гука (подовження пропорційно силі розтягу), закон Ома, закон теплового розширення і т.д. В дійсності всі ці залежності є лінійними лише наближено, але у відповідних, встановлюваних емпірично діапазонах зміни величин припущення про лінійність виконується з хорошою точністю і в той же час істотно спрощує дослідження.

Аналогічно визначається поняття лінійної моделі. Воно застосовується для моделей об'єктів, що розглядаються як *перетворювачі*, для яких кожному входу відповідає деякий *вихід*. Так, якщо ми вивчаємо задачу про прогини прямолінійного стержня під дією поперечної розподіленого навантаження, то входом можна вважати його щільність  $q(x)$ , а виходом – прогин  $y(x)$ . Якщо вивчається задача про вимушені коливання осцилятора, то входом можна вважати закон зміни зовнішньої сили  $F(t)$ , а виходом - закон коливань  $x(t)$  і т.д. В математиці такий перетворювач називається *оператором*. (До речі, і будь-яку функцію можна трактувати як перетворювач, у якого входом служить значення

аргументу або набір значень аргументів, якщо їх декілька, а виходом - значення функції.)

Будемо вважати, що початки відліку входу і виходу вибрані так, що нульовому входу відповідає нульовий вихід. Тоді модель називається *лінійною*, якщо в ній виконаний *принцип суперпозиції* (накладення), тобто при додаванні входів складаються і виходи, а при множенні входу на будь-яке число вихід множиться на те ж число. Якщо цей принцип не виконаний, модель називається *нелінійною*. Лінійні моделі зазвичай описуються лінійними неоднорідними рівняннями - алгебраїчними, диференціальними і т.д., в яких неоднорідний член відповідає входу, а рішення - виходу. Так, в прикладі, при порівняно малих прогинах модель є лінійною і, прийнявши для визначеності, що кінці  $x = a$  та  $x = b$  стержня шарнірно закріплені, отримуємо в якості математичної моделі *крайову задачу* (тобто. задачу про рішення диференціального рівняння при заданих крайових умовах)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q(x) \quad (a \leq x \leq b) ,$$

$$y|_{x=a} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} |_{x=a} = 0, \quad y|_{x=b} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} |_{x=b} = 0, \quad (5.8)$$

де  $E$  - модуль Юнга, а  $I$  - геометричний момент інерції поперечного перерізу відносно осі, що проходить через його центр мас паралельно осі  $z$ . У прикладі, для осцилятора отримуємо *задачу Коші* (тобто задачу з початковими умовами)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t) \quad (0 \leq t \leq \infty);$$

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\text{при } t = 0). \quad (5.9)$$

Лінійним є рішення рівняння у всьому просторі щодо початкової умови  $\theta|_{r=0} = \theta_0(x, y, z)$  і т.д.

Властивість лінійності моделі істотно спрощує побудову і дослідження розв'язання математичної задачі. Так, якщо модель включає звичайне диференціальне рівняння, як в прикладах (5.8) і (5.9), такому дослідженню допомагає те, що рішення такого рівняння стандартним способом виражається

через так звану фундаментальну систему рішень, а якщо коефіцієнти рівняння постійні - то й безпосередньо через експоненти . Цілий ряд методів рішення диференціальних та інших рівнянь був розроблений і найбільш ефективно застосовується для випадку, коли ці рівняння лінійні.

## 5.4 Деякі моделі простих нелінійних об'єктів

### 5.4.1 Історія виникнення не лінійності.

Як уже зазначалося, лінійні моделі підпорядковуються принципу суперпозиції. В такому випадку, знаходячи часткові розв'язки і сумуючи їх, як правило, вдається побудувати і загальний розв'язок.

Для нелінійних моделей принцип суперпозиції не використовується, і загальний розв'язок можна знайти тільки в деяких випадках. Окремі ж часткові розв'язки нелінійних рівнянь можуть не відображати характер поведінки об'єкта в більш загальній ситуації.

Джерелами нелінійності можуть бути багато причин. Фундаментальні закони природи – закон тяжіння і закон Кулона – з самого початку нелінійні (квадратична залежність сили взаємодії між масами або зарядами), і тому засновані на них моделі також нелінійні. Свій внесок в нелінійність моделей вносять складніша геометрія явища, різні зовнішні фактори і, звичайно ж, зміна характеру взаємодії в самому об'єкті при зміні його стану (ефект насичення в моделях популяції, змінні жорсткість пружини).

По суті, реальним явищам відповідають тільки нелінійні моделі, а лінійні справедливі тільки при описанні незначних змін величин, що характеризують об'єкт.

### 5.4.2 Три режими в нелінійній моделі популяції

На відміну від розглянутої моделі Мальтуса коефіцієнт народжуваності будемо вважати залежним від числової популяції  $N(t)$ , тобто  $\alpha = \alpha(N)$ . Коефіцієнт смертності  $\beta$  також залежить от  $N$ . Рівняння динаміки популяції

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha(N) - \beta(N)) \quad (5.10)$$

Залежить нелінійно завдяки зміні характеристик взаємодії в середині популяції при зміні його стану.

Покладемо для визначеності  $\beta(N) = \beta_0 = const, \alpha(N) = \alpha_0 N$ , тобто народжуваність пропорційна чисельності (наприклад, тому що члени популяції зацікавлені в її збільшенні). Тоді рівняння (5.10) матиме вигляд

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \quad (5.11)$$

з квадратичною нелінійністю (характерною також для деяких хімічних реакцій). Розглянемо поведінку функції  $N(t)$  при різних початкових кількостях  $N(0) = N_0$  (рис.5.3).

а) При  $N_0 < N_{кр} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$  кількість монотонно зменшується з часом, прагнучи до нуля при  $t \rightarrow \infty$ .

б) При критичному значенні  $N_0 = N_{кр}$  кількість популяції не залежить від часу.

в) При  $N_0 > N_{кр}$  характер результату принципово змінюється в порівнянні з випадками а) і б): кількість зростає з часом, при чому настільки швидко, що перетворюється в нескінченність за скінченний час  $t = t_f$ . Величина  $t_f$  тим менше, чим більше  $N_0$ .

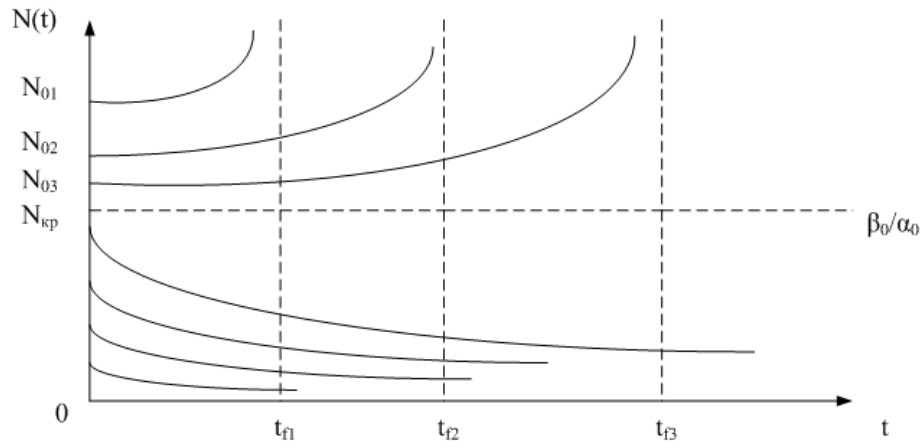


Рисунок 5.3 Залежність функції  $N(t)$  від початкової кількості  $N(0) = N_0$

Нелінійність рівняння (5.11) породжує велику різноманітність ефектів, що містяться навіть в найпростішій моделі: три можливих режими зміни кількості з часом; нестійкість режиму б) – при малих відхиленнях в область а) або в) результат віддаляється від лінії  $N_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$ ; сильну чутливість функції  $N(t)$  до початкових даних  $N_0$ ; нарешті, катастрофічний ріст кількості популяції за скінченний час при  $N_0 > N_{кр}$ .

Зауважимо, що остання властивість не частковий результат, а має місце для будь-яких моделей виду

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \quad t > 0, \quad N(0) > 0, \quad F(0) > 0,$$

якщо при великих  $N$  функція  $F(N)$  зростає швидше першого ступеня  $N$ , точніше, якщо для  $F(N)$  виконується умова

$$\int_{N(0)}^{\infty} \frac{dN}{F(N)} < \infty,$$

отримана безпосереднім інтегруванням рівняння.

### 5.4.3 Вплив сильної нелінійності на процес коливань

Рівняння коливань

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r, \quad (5.12)$$

де функція  $k(r) > 0$  описує жорсткість пружини, – одне із відносно не багатьох нелінійних рівнянь, для якого можна виписати загальний розв’язок.

Вводячи величину швидкості  $v = \frac{dr}{dt}$ , перепишемо в вигляді

$$m \frac{dv}{dt} = -k(r)r, \quad \frac{dr}{dt} = v;$$

поділивши перше з цих рівнянь на друге, отримаємо нелінійне рівняння першого порядку

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{k(r)r}{v}. \quad (5.13)$$

Розділивши в (5.13) змінні:

$$mv \, dv = -k(r)r \, dr,$$

і двічі інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -2 \int_0^r k'(r')r' \, dr' + C, \quad k'(r) = \frac{k(r)}{m},$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{C - 2 \int_0^r k'(r')r' \, dr'},$$

$$t = \pm \int_0^r d\bar{r} \left( \sqrt{C - 2 \int_0^{\bar{r}} k'(r')r' \, dr'} \right)^{-1} + C_1, \quad (5.14)$$

де в неявно виписаному загальному результаті (5.14) константи  $C, C_1$  можна визначити, знаючи початкові дані.

Зауважимо, що дана процедура по відношенню до ряду рівнянь незастосовна (змінні не розділяються), і знайти їх загальний розв’язок цим способом вже не можна.



В лінійному випадку ( $k(r) = k_0$ ) інтегральні криві рівняння (5.13) представляють собою концентричні круги з центром в початку координат, радіус яких визначається початковою енергією системи і «рухом», яким описують періодичний в часі процес коливань (рис.5.4).

Розглянемо тепер сильно нелінійну систему, в якій пружина веде себе як «надм'яка», наприклад,  $k(r) = \frac{1}{r^2 + \alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . В граничному випадку  $\alpha = 0$  рівняння (5.13) матиме вигляд

$$m \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{vr},$$

і його результат принципово відрізняється від результату (5.13) (див.рис.5.5) тим, що енергія не зберігається і, тим більше, нескінченно зростає при  $r \rightarrow \pm 0$ . При послабленні не лінійності процес коливань набуває звичайного вигляду.

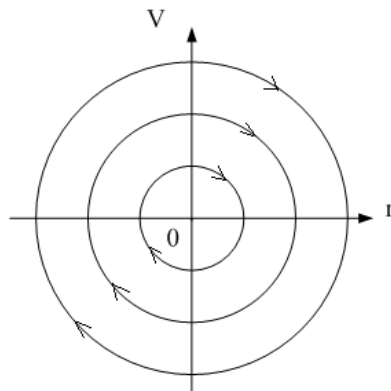


Рис.5.4 Інтегральні криві рівняння (5.13) в лінійному випадку

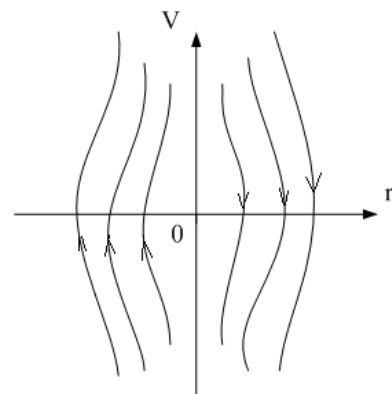


Рис.5.5 Інтегральні криві в нелінійному випадку

## 5.5 Лінеаризація

Вигоди лінеаризації бувають настільки великі, що наближена заміна нелінійних співвідношень на лінійні, нелінійних моделей на лінійні, тобто *лінеаризація* співвідношень, моделей і т. д. дуже розповсюджена. Така

лінеаризація зазвичай проводиться в двох випадках: або якщо експеримент показує (як, наприклад, для закону Гука), що відхилення від лінійності в діапазонах, які розглядаються, зміна змінних невелика і несуттєва, або ж, якщо ці діапазони малі і ми замінюємо приріст на їх диференціали, відкидаючи члени вищого порядку малості.

Покажемо останню процедуру на формальному прикладі. Нехай величини  $x, y, z$  зв'язані рівнянням:

$$\frac{x^3+xy}{y^3+xz} + e^{2z} + 5 = 0. \quad (5.15)$$

Це рівняння при  $x = 2, y = -1, z = 0$  задовольняється. Нехай тепер ці величини мало змінилися, тобто стало  $x = 2+\xi, y = -1+\eta, z = \zeta$ , де  $|\xi|, |\eta|, |\zeta|$  малі. Необхідно знайти лінійне співвідношення між  $\xi, \eta, \zeta$ , справедливе з точністю до членів вищого порядку малості: іншими словами, необхідно провести лінеаризацію рівнянь (5.15) поблизу указаних значень  $x, y, z$  (говорять також – «при цих значеннях»). Для цього про диференціюємо обидві частини рівняння (5.15):

$$\frac{(3x^2 dx + (dx)y + x(dy))(y^3 - xz)}{(y^3 - xz)^2} - \frac{(x^3 + xy)(3y^2 dy - (dx)z + x(dz))}{(y^3 - xz)^2} + e^{2z}(2dz) = 0.$$

Підставивши сюди замість  $x, y, z$  їх вихідні значення, а замість диференціалів – прирости відповідних змінних (при цьому ми нехтуємо величинами вищого порядку малості – в цьому і є суть лінеаризації), отримаємо

$$(11\xi+2\eta)(-1) - 6(3\eta - 2\zeta) + 2\zeta = 0,$$

тобто

$$11\xi + 20\eta - 14\zeta = 0.$$

Лінеаризоване рівняння значно простіше початкового. Його можна записати і в змінних  $x, y, z$ :

$$11(x - 2) + 20(y + 1) - 14z = 0,$$

тобто

$$11x + 20y - 14z = 2.$$

Геометричний зміст проведеної лінеаризації такий: ми отримали рівняння дотичної площини до поверхні (5.15) в просторі  $x, y, z$  в заданій точці  $(2, -1, 0)$ .

На послідовній лінеаризації оснований один із найефективніших методів наближеного розв'язання нелінійних рівнянь різних типів - *метод Ньютона*. Опишемо його спочатку на прикладі розв'язання кінцевого рівняння загального вигляду:

$$f(x) = 0. \quad (5.16)$$

Метод має ітераційний характер. Нехай ми відправляємося від деякого нульового наближення:  $x = x_0$ . Проведемо лінеаризацію функції  $f$  при  $x = x_0$ , для чого розкладемо її в ряд Тейлора по степеням  $x - x_0$  і відкинемо в розкладі всі нелінійні члени. Тоді замість (5.16) ми отримаємо лінеаризоване рівняння:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Його розв'язок назвемо наближенням  $x_1$  розв'язку рівняння (5.16), тобто

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Потім так саме зробимо із  $x_2$  і т. д. Загальна формула для побудови послідовних наближень за методом Ньютона така:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (5.17)$$

Тобто метод Ньютона полягає в застосуванні метода ітерації до рівняння (5.16), переписаному в рівносильній формі:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Чому корисна саме така форма? Для відповіді, позначимо праву частину  $\varphi(x)$ , обчислимо похідну:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Таким чином, для точного розв'язку  $\bar{x}$  рівняння (5.16) отримуємо при  $f(\bar{x}) \neq 0$ , де  $\varphi'(\bar{x}) = 0$ . А це означає, що якщо тільки  $x_0$  не дуже далеко від  $\bar{x}$ , то метод Ньютона збігається з над геометричною швидкістю. (Якщо  $f'(\bar{x}) = 0$ , що буває дуже рідко, то метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії.)

Покажемо ще, як застосовується метод Ньютона до системи кінцевих рівнянь на прикладі системи двох рівнянь загального виду:

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0. \quad (5.18)$$

Нехай ми уже маємо деяке наближення  $x = x_n, y = y_n$ . Щоб перейти до наступного наближення, розкладемо функції  $f$  і  $g$  навколо значень  $x = x_n, y = y_n$  в ряд Тейлора і відкинемо в розкладах всі нелінійні члени. Тоді замість (5.18) ми отримаємо систему рівнянь першого порядку

$$(f)_n + (f'_x)_n(x - x_n) + (f'_y)_n(y - y_n) = 0,$$

$$(g)_n + (g'_x)_n(x - x_n) + (g'_y)_n(y - y_n) = 0,$$

де  $(f)_n = f(x_n, y_n)$ ,  $(f'_x)_n = f'_x(x_n, y_n)$  і т. д. Розв'язок цієї системи і приймається за  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , тобто наступні наближення визначаються із простої системи рівнянь:

$$(f'_x)_n x_{n+1} + (f'_y)_n y_{n+1} = (f'_x)_n x_n + (f'_y)_n y_n - (f)_n,$$

$$(g'_x)_n x_{n+1} + (g'_y)_n y_{n+1} = (g'_x)_n x_n + (g'_y)_n y_n - (g)_n.$$

Таким чином, виходячи із нульового наближення  $x = x_0, y = y_0$  ми можемо, поклавши  $n=0$ , знайти перше наближення  $x = x_1, y = y_1$  і т. д. Із останньої системи одразу видно також, що якщо послідовні наближення збігається при  $n \rightarrow \infty$ , то в границі виходить один із розв'язків системи (5.18). На практиці зазвичай факт збіжності або розбіжності розпізнається легко, так як збіжність в методі Ньютона, якщо вона має місце, відбувається з досить високою швидкістю.

Метод Ньютона розповсюджується і на нелінійні рівняння інших типів, в окремому випадку на крайові задачі для нелінійних диференціальних рівнянь, шляхом зведення їх до послідовного розв'язку лінійних задач.

Існують і інші способи лінеаризації рівнянь і моделей.

## 5.6 Детерміновані та ймовірнісні моделі. Інші типи моделей

Математична модель може включати випадкові компоненти – випадкові скалярні або векторні величини, випадкові послідовності або функції, випадкові структури і т. п., задовольняючі статистичні закони. Такі моделі називаються *ймовірнісними* або *стахостичними*, на відміну від *детермінованих* моделей, які таких компонентів не містять. Так, якщо який-небудь елемент об'єкта, що вивчається являється виріб масового виробництва і на властивості, що нас цікавлять можуть дуже вплинути на відхилення параметрів від їх номінальних значень, то ці параметри часто вважають випадковими величинами. Випадкові функції з'являються, наприклад, при розгляданні дії вітру на які-небудь споруди, сигналів на фоні шуму, шорстких поверхонь, турбулентних рухів рідин і т.д.

Ймовірнісні моделі вивчаються за допомогою методів теорії ймовірності. На жаль, дуже часто буває, що ймовірнісні характеристики випадкових компонентів (математичне очікування і дисперсія випадкових величин, тим більше закони розподілу останніх, а також аналогічні характеристики випадкових функцій) виявляються відомими з доволі невисокою точністю або навіть зовсім невідомими, тобто модель не задовольняє умови продуктивності. Методи математичної статистики направлені на визначення таких характеристик, але і ці методи не завжди вдається ефективно застосовувати. При цьому при побудові ймовірнісних моделей потрібно приділяти велику увагу джерелу таких характеристик. Якщо вони не піддаються визначенню з необхідною точністю, то можна спробувати шукати іншу модель, можливо більш грубу, але й більш стійку відносно пропусків в знанні вихідних даних. Наприклад, інколи удається провести дослідження і обчислення за максимальним відхиленням параметрів, що розглядаються. Приведемо приклад. Нехай  $x$  – розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} + a(t; \omega)x = 0 \quad (0 \leq t < \infty), \quad x(0) = 1,$$

де  $a$  – випадкова функція (змінна  $\omega$ , як це прийнято в теорії ймовірностей, має сенс елементарного результату). Тоді і  $x = x(t; \omega)$  – випадкова функція, характеристики якої суттєво залежать від характеристик функції  $a$ . Але нехай не представляється можливим детально дізнатися характеристики функції  $a$ , відомо тільки, що завжди  $1 \leq a \leq 2$ . Тоді, підставляються крайні можливі значення та отримуємо гарантовану оцінку розв’язків:  $e^{-2t} \leq x \leq e^{-t}$ ; з неї, наприклад, слідує, що  $x(t; \omega) \rightarrow 0$  з експоненціальною швидкістю при  $t \rightarrow \infty$ .

Застосовується класифікація моделей і за іншими ознаками. Так, розрізняють *статичні* і *динамічні (еволюційні)* моделі; для другого типу моделей предметом вивчення являється зміна об’єкта, що розглядається в часі. Проміжне місце займають *квазістатичні, стаціонарні* та *квазістатичні* моделі. В квазістатичній моделі приймається, що зміна об’єкта відбувається так повільно, що при розгляданні ситуації в кожний момент можна в першому наближенні об’єкт вважати статичним (грубо кажучи, знехтувати інерційними силами), а час вважати додатковим параметром. В стаціонарній моделі вважається, що процеси відбуваються, але об’єкт, який вивчається в часі не змінюється; найпростіший приклад – електричне коло з постійним струмом. Звичайно визначається і квазістаціонарна модель.

В зв’язку з переліченими зараз типами моделей згадаємо ще про термінах, які тут застосовуються: *встановленим* процесом зазвичай називають стаціонарний або періодичний процес; *перехідним* процесом називають процес переходу від одного статичного стану або встановленого процесу до іншого.

## 5.7 Матеріали для повторення

### 5.7.1 Рівняння, що не розв'язуються відносно похідної

1. Рівняння виду  $F(x, y, y')=0$  можна розв'язувати наступними методами.

а) Розв'язати рівняння відносно  $y'$ , точніше із рівняння  $F(x, y, y')=0$  виразити  $y'$  через  $x$  та  $y$ . Отримаємо одне або кілька рівнянь вигляду  $y'=f(x, y)$ . Кожне з них необхідно розв'язати.

б) Метод введення параметру.

Нехай рівняння  $F(x, y, y')=0$  можна розв'язати відносно  $y$ , точніше записати  $y=f(x, y')$ . Введемо параметр

$$p = \frac{dy}{dx} = y', \quad (1)$$

отримаємо

$$y = f(x, p). \quad (2)$$

Взявши повний диференціал від обох частин рівності (2) та зробивши заміну  $dy$  через  $p \, dx$  (враховуючи (1)), отримаємо рівняння вигляду

$$M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0.$$

Якщо розв'язок цього рівняння в вигляді  $x = \varphi(p)$ , то використовуючи рівність (2), отримаємо розв'язок вихідного рівняння в параметричній формі  $x = \varphi(p)$ ,  $y = f(\varphi(p), p)$ .

Рівняння вигляду  $x=f(y, y')$  розв'язуються аналогічно.

*Приклад.* Розв'язати рівняння  $y = x + y' - \ln y'$ . Вводимо параметр  $p=y'$ :

$$y = x + p - \ln p. \quad (3)$$

Беремо повний диференціал від обох частин рівності та замінюємо  $dy$  на  $p \, dx$  враховуючи (1):  $dy = dx + dp - \frac{dp}{p}$ ,  $p \, dx = dx + dp - \frac{dp}{p}$ .

Розв'язуємо отримане рівняння. Переносимо члени з  $dx$  вліво, а з  $dp$  – вправо:

$$(p - 1)dx = \frac{p-1}{p} dp. \quad (4)$$

а) Якщо  $p \neq 1$ , то скорочуємо на  $p-1$ :

$$dx = \frac{dp}{p}, x = \ln p + C.$$

Підставляючи цей вираз в (3), отримаємо розв'язок в параметричному вигляді:

$$x = \ln p + C, y = p + C. \quad (5)$$

В данному випадку можна виключити параметр  $p$  та отримати розв'язок в явному вигляді. Для цього із першого з рівнянь (5) виражаємо  $p$  через  $x$ , точніше  $p = e^{x-C}$ . Підставивши цю заміну в (2), отримаємо шуканий розв'язок:

$$y = e^{x-C} + C. \quad (6)$$

б). Розглянемо випадок, коли в (4) маємо  $p = 1$ . Підставляючи  $p = 1$  в (3), отримаємо ще один розв'язок

$$y = x + 1. \quad (7)$$

Було б помилкою в рівності  $p = 1$  замінити  $p$  на  $y'$  та, проінтегрувавши, отримати  $y = x + C$ .

2. Розв'язок  $y = \gamma(x)$  рівняння  $F(x, y, y') = 0$  називається *особливим*, якщо через кожен його точку, крім цього розв'язку, проходить і другий розв'язок, що має в цій точці ту ж дотичну, що й розв'язок  $y = \gamma(x)$ , але не співпадає з ним в околі цієї точки.

Якщо функція  $F(x, y, y')$  та похідні  $\frac{\partial F}{\partial y}$  та  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  неперервні, то будь-який особливий розв'язок рівняння

$$F(x, y, y') = 0 \quad (8)$$

задовільняє також рівняння

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \quad (9)$$

Для того, щоб знайти особливі розв'язки рівняння (3), необхідно виключити  $y'$  з рівнянь (8) та (9). Отримане рівняння  $\psi(x, y) = 0$  називається рівнянням *дискримінантної кривої*. Для кожної гілки дискримінантної кривої необхідно перевірити чи дана гілка є розв'язком рівняння (8), і якщо є, то чи



буде цей розв'язок особливим, точніше чи дотикаються його в кожній точці інші розв'язки.

*Приклад.* Знайти особливі розв'язки рівняння

$$y = x + y' - \ln y'. \quad (10)$$

Диференціюємо обидві частини рівності по  $y'$ :

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}. \quad (11)$$

Виключаємо  $y'$  з рівнянь (10) та (11). З (11) маємо  $y' = 1$ ; підставляючи цей вираз в (10), отримуємо рівняння дискримінантної кривої

$$y = x + 1. \quad (12)$$

Зробимо перевірку на відповідність цієї кривої особливим розв'язкам. Для цього спочатку перевіряємо чи є вона розв'язком рівняння (10). Підставляючи (12) в (10), отримуємо рівність  $x + 1 = x + 1$ . Це означає, що крива (12) – розв'язок.

Тепер перевіримо чи є цей розв'язок особливим, тобто чи дотикаються його в кожній точці інші розв'язки. В п. 1 було знайдено, що інші розв'язки виражаються формулою (6). Записуємо умову дотику кривих  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$  в точці з абсцисою  $x_0$ :

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), y'_1(x_0) = y'_2(x_0). \quad (13)$$

Для розв'язку (6) та (12) ці умови приймають вигляд  $e^{x_0-C} + C = x_0 + 1$ ,  $e^{x_0-C} = 1$ . З другого рівняння маємо  $C = x_0$ ; підставляючи це в перше рівняння, отримаємо  $1 + x_0 = x_0 + 1$ . Ця рівність справедлива при всіх  $x_0$ . Це означає, що при кожному  $x_0$ , розв'язок (12) в точці з абсцисою  $x_0$ , дотикається одній з кривих сімейства (6), а саме тієї кривої, для якої  $C = x_0$ .

Отже, в кожній точці розв'язку (12) дотикається другого розв'язку (6), що не співпадає з ним. Це означає, що розв'язок (12) – особливий.

Якщо сімейство розв'язків записано в параметричному вигляді, як в (5), то виконання умови дотику перевіряється аналогічно. При цьому необхідно врахувати, що  $y' = p$ .

2. Якщо сімейство кривих  $\Phi(x, y, C) = 0$ , що є розв'язком рівняння  $\Phi(x, y, y') = 0$  та має огинаючу  $y = \varphi(x)$ , то ця огинаюча є особливим розв'язком того ж рівняння. Якщо функція  $\Phi$  має неперервні перші похідні, то для знаходження згинаючої необхідно виключити  $C$  із рівняння

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

та перевірити чи є отримана крива огинаючою, точніше чи дотикаються її в кожній точці криві сімейства. Цю перевірку можна зробити приведеним вкінці п.2 методом, використовуючи умову дотику (13).

### 5.7.2 Завдання

I. Знайти всі розв'язки рівняння; виділити особливі розв'язки

1.  $y'^2 - y^2 = 0$

2.  $8y'^3 = 27y$

3.  $yy'^3 + x = 1$

4.  $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$

5.  $y^2 (y'^2 + 1) = 0$

6.  $y'^2 - 2xy = 8x^2$

7.  $y'^4 - y'^2 = y^2$ .

## 6. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

### 6.1 Про змістовну модель

Зрозуміло але найважливіший початковий етап побудови або вибору математичної моделі – це отримання по можливості більш чіткішого уявлення про модельований об'єкт та уточнення його змістовної моделі, основане на неформальних обговореннях. Не можна шкодувати часу та зусиль на цей етап, від нього в значній мірі залежить успіх всього дослідження. Не раз бувало, що значна праця, витрачена на рішення математичної задачі, виявилась малоефективна або навіть змарнована через недостатню увагу до цієї сторони завдання.

В задачах тих типів, котрі ми тут розглядаємо, цей етап зазвичай полягає в уточненні структури досліджуваного об'єкта, істотних для проведеного дослідження властивостей його компонентів та характеру їх взаємодії. Нехай, наприклад, ми вивчаємо дію деякого механічного приладу. Тоді ми починаємо з'ясування того, з яких частин воно складається, які їх властивості, як ці частини взаємодіють, які сили при цьому виникають, а також чи не можуть які-небудь немеханічні процеси (теплові, електричні та ін.) помітно вплинути на досліджувану ситуацію.

Змістовну модель, особливо при первинному дослідженні, бажано по можливості спростити (але, звичайно, так щоб при цьому не спотворити якісну картину явища): грубу модель можливо в подальшому уточнити. Так, ми з'ясовуємо, чи не можна прийняти той або інший елемент приладу за матеріальну точку або за абсолютно жорстке тіло; якщо форма цього елемента суттєва, то чи не можна рахувати її простою і т.п. При такому спрощенні потрібно використовувати аналогії з іншими успішно вирішеними задачами, з іншим власним та чужим досвідом. Але, звичайно, не можна бездумно йти за готовими схемами, так як рішення кожної нової задачі потребує нових, інколи принципово нових, міркувань.

Якщо твердий елемент приладу володіє піддатливістю, то необхідно вивчити її характер, тобто чи слід рахувати деформації пружними або пластичними і т.п., чи можна рахувати матеріал однорідним та ізотропним. Якщо в розглянуту систему входять сипучі тіла, ґрунт або інші «некласичні» середовища, то потрібно уточнити, які з потрібних нам властивостей цих середовищ відомі. Аналогічно уточнюються властивості рідких та газоподібних компонентів: наявність в'язкості, стискальності, характер руху (ламінальне, турбулентне) і т.п.

При спрощенні складних структур широко використовується осереднення. Так, багатокомпонентні середовища (композити, суспензії і т.п.) замінюються на однокомпонентні з відповідно підібраними властивостями; повторювані дискретні навантаження, з'єднання (типу заклепочних швів), інші конструктивні елементи – на неперервні, якщо це спрощує дослідження; осереднюються також швидко коливні зовнішні впливи.

Важливу роль грає з'ясування сил, діючих в системі, як зовнішніх, так і внутрішніх. І тут намагаються справити спрощення: малоістотні сили ігноруються (їх можливо враховувати при уточненні дослідження); за можливістю проводиться групування сил з заміною їх на рівнодіючі і т.п. Приведемо простий приклад, розглянутий раніше.

Вантаж маси  $m$  коливається на горизонтальній площині під дією пружини з жорсткістю  $k$ . Припустимо, що протидіючі сили (зокрема, сила тертя) зневажливо малі і нас цікавить характер і частота коливань.

Нехай масою  $m_n$  пружини нехтувати не можна; як врахувати цю обставину? Відмітимо, перш за все, що якщо один кінець однорідної пружини маси  $m_n$  закріплений, а інший рухається вздовж лінії її дії зі швидкістю  $v$ , то, прийняв розтягнення рівномірним і позначив  $l_n$  її довжину в ненавантаженому стані, отримаємо вираз для кінетичної енергії пружини:

$$T_n = \int_0^{l_n} \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l_n} v \right)^2 \left( \frac{m_n}{l_n} dx \right) = \frac{1}{6} m_n v^2.$$

Тому закон зберігання енергії в застосуванні до розглянутої системи має вид

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{6}m_n\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$$

Після диференціювання і скорочення на  $\frac{dx}{dt}$  отримуємо

$$\left(m + \frac{1}{3}m_n\right)\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Зрівнюючи з рівнянням в якому не враховується маса пружини, видно що в приведених припущеннях можливо рахувати масу пружини рівною нулю – це, звичайно, спростить модель, - але до маси вантажу додасть  $\frac{m_n}{3}$ .

Це поправний доданок називається *приєднаною масою* пружини в розглянутій задачі.

Відмітимо, що при аналізі змістовної моделі потрібно уточнити, які саме дані ми можемо рахувати відомими, - зокрема, чи не простіше безпосередньо виміряти величину, яку в принципі можливо і розрахувати.

## 6.2 Формулювання математичної задачі. Задачі аналізу та синтезу

Далеко не завжди питання про те, якого типу математичну задачу ми будемо розраховувати, навіть які величини ми будемо шукати, буває ясно з самого початку. Задача може бути поставлена не в конкретній формі («Знайти частоту коливань такої-то системи»), а в формі не стільки визначеною («Досліджувати поведінку такої-то системи», «Оптимізувати якийсь прилад шляхом підбору його параметрів і т.п.»). Тоді потрібно хоча б попереднє уточнення плану дії: які величини було б бажано знайти, які залежності дослідити і звідки їх можливо було б отримати, по якому критерію проводити оптимізацію і т.д. Такий план, котрий згодом може видозмінюватись і

доповнюватись, бажано обміркувати на можливо більш ранній стадії дослідження, оскільки він може істотно вплинути на формулювання математичної моделі: що ми будемо вважати вихідними даними, які величини шукати, якого типу рівняння нам потрібні для цього і т.д. При уточненні математичної моделі ми уточнюємо і план дії, в результаті чітко формулюючи математичну задачу. (Втім, буває, що навіть чітко сформульована задача видозмінюється в процесі подальшого дослідження).

Прикладні математичні задачі можна умовно підрозділити на два класи. В задачах одного класу мова іде про дослідження властивостей заданого об'єкту – це *задачі аналізу*. Задачі другого класу мають ціль вибір об'єкту з деяких сукупностей на основі якихось вимог – це *задачі синтезу*. (Термін «задачі синтезу» використовують і в більш спеціальному розумінні; зокрема в теорії системи управління він означає задачу про побудову такої системи, що має приписане функціонування на основі використання зворотного зв'язку). Звичайно, це підрозділ умовний, так як багато задачі можна в рівній мірі віднести як до одного, так і до другого класу. Проте з змістовної постановки задачі частіш буває ясно, про задачу якого класу йде мова.

Для задач аналізу, котрі ми будемо в подальшому розглядати, математична модель зазвичай зводиться до рівняння того чи іншого виду. Математична модель задачі синтезу також може зводитись до рішення рівнянь, якщо умови, на основі яких потребується вибрати об'єкт, мають вигляд деяких рівностей. Але часто умова вибору має другий характер: для об'єкту який обирається деяка задана скалярна функція його параметрів (цільова функція) повинна прийняти найменш або найбільш можливе значення. Тоді математична модель зведеться до задачі на екстремум.

### 6.3 Визначальні співвідношення

Основними «конструктивними елементами» математичної моделі для розглянутого нами класу задач являється ті чи інші постійні і змінні величини, які входять в склад моделі, і функціональні залежності одних величин від інших. Деякі з постійних величин можуть бути задані (це *параметри* задачі), інші – шукані; також відноситься до функцій. Модель складається з таким розрахунком, щоб, знайшовши шукані величини і функції, ми могли дати відповідь на поставлене питання. Так, в прикладі відповідь на питання про характер коливань давала функція  $x(t)$ , а про частоту – постійна  $\omega_0$ .

Задані та шукані величини і функції в математичній моделі зазвичай зв'язуються рівняннями і нерівностями. Більш того, в багатьох випадках. Особливо в задачах аналізу, сама модель має вид рівняння або системи рівнянь. Але і в цьому випадку, якщо модель містить ще щось, рівняння зазвичай складають її вельми істотну частину.

Рівняння, що включаються в математичну модель вивчає мого об'єкту, виписуються на основі *визначальних співвідношень* між величинами, що впливають с постулатів змістовної моделі. Ці постулати можуть мати різне походження і різну ступень адекватності.

Деякі постулати безпосередньо впливають з універсальних фізичних законів, таких, як закон збереження енергії, другий закон Ньютона і т.п. Аналогічну роль грають фізичні закони з обмеженою областю дії, для яких можливість використання в вивчає мій задачі впливає з універсальних законів наприклад, якщо йде мова про використання закону збереження мас в задачах інженерної механіки. (В цих задачах зміна мас, що впливає з теорії відносності, явно знехтувано мала). Повна адекватність таких постулатів безсумнівна.

Однак універсальних і споріднених їм законів в переважній більшості досліджень недостатньо і тому доводиться також використовувати закони, які

мають інший характер. Широко змінюються, в частості, *феноменологічні закони* – такі, як закон Гука або згаданий закон Фур'є, тобто досить добре емпірично (і частково теоретично) обґрунтовані закони з обмеженою областю дії, також встановленою емпірично. При використанні феноменологічного закону для побудови математичної моделі досить важливими являються питання про саму можливість цього використання (тобто про попадання досліджуваної ситуації в сферу дії закону) і про наслідки можливих відхилень від цього закону. Буває, що можливість цього використання застережена в умові задачі, але ці питання все рівно виникнуть при використанні отриманих результатів до реального об'єкту.

Ще менше універсальний характер мають полу *емпіричні співвідношення*, які отримані в результаті співвідношення якісних міркувань (зокрема, міркувань розмірності) і обробки результатів експерименту, або іншої статистики, або виведені з інших співвідношень такого характеру. Так, в прикладній аеродинаміці добре відома формула для підйомної сили  $P$  при плоскому дозвуковому обтіканні крила:

$$P = c_y \frac{\rho v^2}{2} b, \quad (6.1)$$

де  $\rho$  и  $v$  - відповідно щільність і швидкість набігаючого потоку,  $b$  - хорда профіля крила,  $c_y$  - безрозмірний коефіцієнт, залежний від форми профіля і напрямлення набігаючого потоку. Те, що формула має мати такий вид, легко впливає з міркувань розмірності, але для конкретних розрахунків дуже важливо знати, чому рівне  $c_y$  для різних реальних профілів і «кутів атаки»  $\alpha$ , який характеризує напрямлення набігання потоку. Це теоретично зробити в принципі можливо, але не просто; простіше це зробити емпіричним шляхом продувки моделі в аеродинамічній трубі. В результаті буди отримані графіки залежності  $c_y(\alpha)$  для багатьох найбільш цікавих профілів.

Цікаво зрівняти формулу (6.1) з формулою Жуковського для тої ж задачі:  $P = \rho v \Gamma$ , де  $\Gamma$  - циркуляція вектора швидкості повітря по контуру, що охоплює профіль крила. Остання формула в теоретичному відношенні більш здійсненна,



так як не містить емпіричного коефіцієнта  $c_y$ . Але як в реальній ситуації знайти значення  $\Gamma$ ? Теоретично це вдасться лиш в рідкісних випадках, а отримати  $\Gamma$  за допомогою вимірювання ще важче, ніж  $c_y$ . В такому випадку, формула (6.1) володіє істотною перевагою в продуктивності, про яку ми говорили раніше.

Використовуються також і чисто емпіричні співвідношення, які отримують за допомогою прямої обробки даних спостереження або експерименту і частіше навіть прив'язані до певних одиниць вимірювань.

Нажаль, і цих співвідношень деколи виявляється мало, і приходиться йти на певний ризик, використовуючи відомі формули поза рамками. Де вони були встановлені, в надії на то, що це не дасть істотної помилки або що помилку можливо компенсувати шляхом якихось поправок. Інколи приходиться також виводити нові формули на основі недостатніх даних. В таких випадках потрібно чітко бачити – і не ховати від інших – слабкі місця в міркуваннях, так як тут особливо велика небезпека грубих помилок і, зокрема, підгон рішення під бажаний результат, який до того ж, особливо після використання ЕОМ, отримує видимість математичного обґрунтування. В таких випадках математика може принести не користь, а шкоду!

Висновки з недостатньо обґрунтованої моделі потрібно намагатись перевіряти, змінюючи модель або порівнюючи якісь з цих висновків з емпіричними даними або теоретичними даними, отриманими незалежно від проведеного дослідження.

#### 6.4 Підбір емпіричних формул

Зупинимось особливо на питанні про підбір *емпіричної формули* для функціональної залежності між величинами.

Нехай ми знаємо, що деяка величина  $y$  являється функцією іншої величини  $x$ , тобто  $y = y(x)$ , але аналітичний вираз цієї функції нам невідомий і

ми хочемо підібрати для неї формулу  $y = f(x)$ , з достатньою для нас точністю, яка описує залежність. Нехай, далі, в результаті експеримент або спостереження ми отримали ряд значень  $x$  і відповідних значень  $y$ :

$$x = x_1, x_2, \dots, x_N;$$

$$y = y_1, y_2, \dots, y_N.$$

Тоді, якщо  $N$  не дуже великий, зазвичай починають з нанесення цих даних на координатну вісь в вигляді окремих точок. При цьому стає видно, що точки випадають із загального ходу залежності. Вони можуть свідчити про якісь важливі ефекти, які потребують спеціального дослідження, але частіше виходять через істотні помилки при експерименті або обчисленнях - тоді ці точки просто ігноруються.

Потім треба вибрати вид формули, якою ми будемо користуватися. Якщо цей вид не впливає з якихось загальних міркувань, то зазвичай вибирають одну з найпростіших елементарних функцій або їх просту комбінацію (суму степеневих або показникових функцій і т. п.); звичайно, для цього треба добре уявляти собі можливі графіки таких функцій. При цьому стежать за тим, щоб відібрана функція  $f(x)$  мала ті ж характерні особливості, що і досліджувана функція  $y(x)$ . Так, якщо за своїм змістом функція  $y(x)$  парна, то і функція  $f(x)$  повинна бути парною і т. п.; дуже важливо правильно передати поведінку функції при великих і малих значеннях  $x$ , можливу зміну її знаку та інші її істотні риси. На малому інтервалі зміни  $x$  часто застосовують найбільш просту - лінійну функцію, а поблизу точки екстремуму - квадратичну функцію. Іноді не вдається підібрати єдину формулу на всьому інтервалі зміни  $x$  і доводиться розбивати цей інтервал на частини і на кожній підбирати свою формулу.

Після вибору виду формули потрібно визначити значення вхідних в неї параметрів. Розглянемо спочатку випадок, коли експериментальні точки підказують лінійну залежність  $y$  від  $x$ , тобто ми вважаємо  $f(x) = ax + b$  і нам треба знайти значення параметрів  $a$  і  $b$ . Якщо високої точності не потрібно (тим більше, що формула все одно наближена), то це можна зробити безпосередньо за допомогою графіка, провівши пряму - найкраще застосувавши прозору

лінійку, - до якої експериментальні точки лежать ближче всього, а потім визначити її параметри. Якщо потрібна велика точність або якщо ми хочемо обійтися без геометричних побудов, обмежившись лінійними наближеннями, то найбільш часто для підбору параметрів  $a$  і  $b$  застосовується метод найменших квадратів. Він полягає в мінімізації суми квадратів різниць між емпіричними значеннями функції і відповідними її значеннями, отриманими з наближеної формули,

$$\sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2 \rightarrow \min$$

Застосування необхідної умови екстремуму (рівність нулю похідних першого порядку по кожному аргументу) до цієї суми, розглянутої як функція величин  $a$ ,  $b$  приводить до простої системи рівнянь для визначення  $a$  й  $b$ :

$$a \sum_i x_i^2 + b \sum_i x_i = \sum_i x_i y_i ; \quad a \sum_i x_i + Nb = \sum_i y_i$$

цей метод можна застосувати і до формул іншого виду, навіть до тих що містять більше однієї незалежної змінної і (або) будь-яке число параметрів, якщо ці параметри входять лінійно в шукану формулу. Якщо це не так, то іноді виявляється можливим ввести нові змінні так, щоб ця умова була виконана. Наведемо приклад. Нехай експеримент привів до значень:

$$x = 0,00; 0,10; 0,20; 0,30; 0,40; 0,50; 0,60; 0,70; 0,80; 0,90; 1,00;$$

$$y = 0,00; 0,01; 0,03; 0,08; 0,17; 0,29; 0,45; 0,66; 0,91; 1,22; 1,57.$$

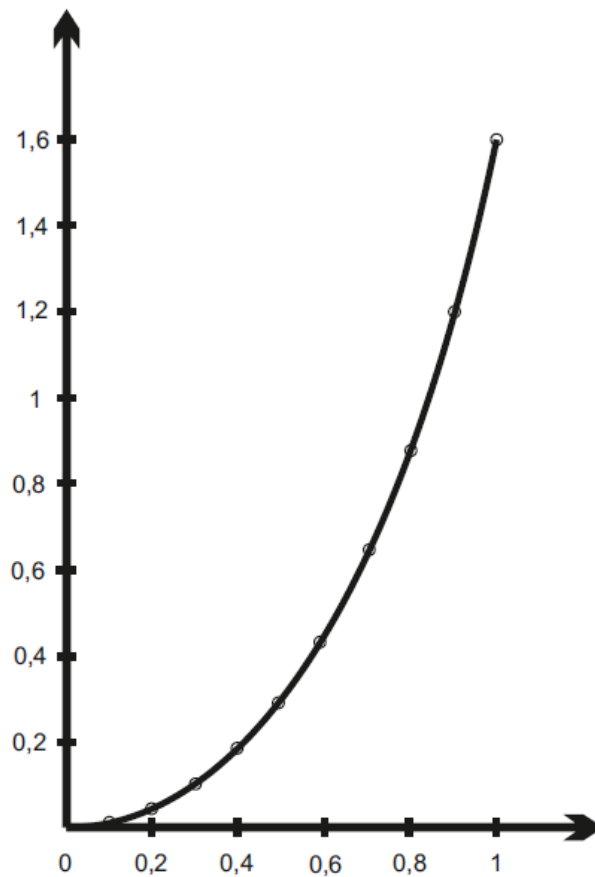


Рис.6.1 Експериментальна залежність

Зображення експериментальних точок, нагадує про степеневу функцію виду  $y = ax^b$ , в котру параметр  $b$  входить нелінійно. Тому прологарифмуємо цю рівність і позначимо  $\ln y = Y$ ,  $\ln x = X$ ,  $\ln a = A$ . Ми приходимо до формули  $Y = bX + A$ , в яку параметри  $A$  і  $b$  входять лінійно. У нових змінних таблиця має вигляд

$X = -1,0000; -0,6990; -0,5229; -0,3979; -0,3010; -0,2218; -0,1549; -0,0969; -0,0458; 0,0000$

$Y = -2,0000; -1,5229; -1,0969; -0,7696; -0,5376; -0,3468; -0,1805; -0,0410; 0,0864; 0,1959$ .

Застосування методу найменших квадратів дає значення  $b = 2,2734$ ,  $A=0,16079$ , звідки  $a = 1,4481$ , і з урахуванням точності вихідних даних ми отримуємо наближену формулу  $y = 1,45 x^{2,27}$ . Відзначимо, що на отримані

значення параметрів можуть суттєво вплинути похибки при вимірюванні малих значень у. Для підвищення достовірності результату слід або підвищити

## 6.5 Про розмірності величин

У додатках математики - на відміну від курсу самої математики - розглядаються величини, як правило, розмірні. цьому важливому питанню не завжди приділяється необхідна увага, що може стати джерелом помилок. Нагадаємо, що за визначенням дві величини мають однакову розмірність, якщо їх можна виразити в одних і тих же одиницях виміру. Так, величини  $V1 = 5 \text{ км/с}$  і  $V2 = 3 \text{ фут/рік}$  мають однакову розмірність; це записують так:  $[V1] = [V2]$ . Зазвичай розмірності деяких величин приймаються за основні, а розмірності інших величин виражаються через основні. Так, в завданнях, пов'язаних з механікою, за основні беруться розмірності довжини (ця розмірність позначається буквою  $L$ ), часу ( $T$ ) і маси ( $M$ ), так що, наприклад,

$$[V1] = [V2] = L/T = LT^{-1}$$

При вирішенні завдань в буквеній формі зазвичай всі формули без особливої уваги вважаються *розмірно однорідними*, тобто не пов'язаними з певними одиницями вимірювання величин, які записані у формулі. Але в числових відповідях ці одиниці зазвичай присутні, тобто розмірна однорідність порушується. Наприклад, широко відома формула для шляху при вільному падінні  $s = \frac{at^2}{2}$  розмірно однорідна, тоді як та ж формула, записана у вигляді  $s = 4,90t^2$ , вже не володіє цією властивістю, вона вимагає, щоб  $s$  було виражено в метрах, а  $t$  – в секундах.

Як перейти в розмірно неоднорідній формулі до інших одиниць вимірювання? Нехай, наприклад, ми хочемо в останній формулі перейти до кілометрів і хвилин. Для цього представимо

$$s(m) = \frac{s}{1m} = \frac{s}{10^{-3} \cdot 1km}, t(c) = \frac{t}{1c} = \frac{t}{60^{-1} \cdot 1x6}.$$

де  $s$  і  $t$  – розмірні шлях і час. Звідси отримуємо детально

$$s(km) = \frac{s}{1km} = 10^{-3} s(m) = 10^{-3} \cdot 4,90 [t(c)]^2 = 10^{-3} \cdot 4,90 \cdot \left[ \frac{t}{60^{-1} \cdot 1x6} \right]^2 = \frac{10^{-3} \cdot 4,90}{60^{-2}} [t(x6)]^2$$

чи остаточно в нових одиницях  $s = 17.65t^2$

Якщо розмірність якоїсь величини не відразу видно з її визначення, то її легко отримати з будь-якої розмірно однорідної формули, яка містить цю величину і інші величини, розмірність яких відома. З'ясуємо, наприклад, розмірність коефіцієнта температуропровідності. Так як диференціал будь-якої величини має ту ж розмірність, що і сама величина, то, прирівнюючи розмірності лівої і правої частин формули, отримуємо

$$\frac{[\theta]}{[t]} = [a] \frac{[\theta]}{[x]^2}, \quad \text{звідки} \quad [a] = \frac{[x]^2}{[t]} = L^2 T^{-1}.$$

Особливу роль відіграють безрозмірні величини. Їх числові значення не залежать від вибору системи одиниць.

## 6.6 Подібність об'єктів

Як відомо, дві геометричні фігури подібні, якщо вони мають однакову форму, але різні розміри. Більш точно це означає, що довжини будь-яких ліній на одній з фігур мають бути пропорційними довжинам відповідних ліній на другій фігурі; при цьому коефіцієнт пропорційності називається *коефіцієнтом подібності*. Наприклад, у подібних трикутників пропорційні не тільки відповідні сторони, але й відповідні висоти, медіани і т. д., все з одним і тим же коефіцієнтом пропорційності. Тому перерахунок довжин при переході від будь-якої фігури до подібної фігури рівносильний тому, що ми залишаємо без зміни чисельні значення всіх довжин, але змінюємо одиницю довжини в  $k$  раз, де  $k$

коефіцієнт подібності. При цьому всі площі змінюються в  $k^2$  раз, об'єми (якщо фігура просторова) – в  $k^3$  раз; безрозмірні характеристики – кути, відношення сторін або якихось інших довжин і т. п. – у подібних фігур однакові.

Аналогічно вводиться поняття подібності в інших дисциплінах. Два об'єкти (у тому числі стани, процеси) називаються *подібними*, якщо вони відрізняються тільки масштабами основних розмірних величин (зокрема, для об'єктів механіки – масштабами довжини, часу і маси). Більш докладно це означає, що перерахунок усіх характеристик об'єкта при переході від нього до подібного об'єкту рівносильний збереженню всіх чисельних значень величин і заміні одиниць вимірювання основних розмірних величин; при цьому коефіцієнти подібності по кожній з цих основних величин різні. Відзначимо, що точніше було б говорити про подібність моделей об'єктів, так як самі об'єкти можуть мати які-небудь додаткові характеристики, які не включаються в модель; але ми не будемо змінювати усталену термінологію.

Будь-яка безрозмірна комбінація величин, що характеризують об'єкт, повинна дорівнювати такій же комбінації для будь-якого подібного об'єкта. Подібність двох об'єктів забезпечується збігом для них основних безрозмірних комбінацій із заданих параметрів об'єкта; ці комбінації, які називаються *критеріями подібності*, вибираються так, щоб вони були незалежними (не виражалися одна через одну), але щоб через них виражалися всі інші безрозмірні комбінації параметрів об'єкта. Якщо є всього  $N$  незалежних істотних параметрів об'єкта, а основних розмірностей  $n$ , то критеріїв подібності має бути  $N - n$ .

Наведемо приклади. Спочатку розглянемо подібність трикутників. Для трикутника є три незалежних істотних параметра, які його повністю визначають – це його сторони  $a, b, c$ . Так як вони мають однакову розмірність, то умова подібності трикутників із сторонами  $a, b, c$  і  $a', b', c'$  така:

$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

В даному випадку  $N = 3, n = 1$ ; тому тут є  $3 - 1 = 2$  критеріїв подібності, в якості яких можна вибрати або відношення  $b/a$  і  $c/a$ , або відношення  $b/a$  і кут  $C$ , або кути  $A$  і  $B$ ; ми приходимо до відомих ознак подібності трикутників.

Як другий приклад розглянемо коливання математичного маятника без загасання. Тут параметрами процесу можна вважати довжину  $l$  маятника, масу  $m$  вантажу, прискорення  $g$  сили тяжіння і найбільший кут  $\varphi$  відхилення маятника від вертикалі. Так як

$$[l] = L, \quad [m] = M, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [\varphi] = 1$$

і є три основних розмірності, то  $N - n = 4 - 3 = 1$ , тобто критерій подібності тільки один; ясно, що це  $\varphi$ . Таким чином, коливання маятників з однаковим значенням  $\varphi$  подібні. Нехай нас цікавить циклічна частота  $\omega$  коливань. Так як  $[\omega] = T^{-1}$ , то величина  $lg^{-1}\omega^2$  безрозмірна, а тому для подібних процесів однакова, тобто залежить тільки від  $\varphi$ . Ми отримуємо формулу  $lg^{-1}\omega^2 = f(\varphi)$ , звідки

$$\omega = \sqrt{f(\varphi)} \sqrt{\frac{g}{l}} = c_\varphi \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (6.2)$$

де  $c_\varphi$  - безрозмірний коефіцієнт, що залежить тільки від  $\varphi$ . Вигляд цієї залежності тільки з міркувань розмірності отримати не можна (можна довести, що

$$c_\varphi = \pi \left( 2 \int_0^{\pi/2} d\alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \alpha} \right)^{-1}.$$

Але і без цього з формули (6.2) можна отримати корисні наслідки: ми бачимо, що частота коливання не залежить від маси вантажу; бачимо, як вона залежить від  $l$ , а це дає можливість, знаючи частоту для одного маятника, перерахувати її для іншого і т. д.

Аналогічно виходить формула (6.1), при виведенні якої треба врахувати, що для плоскої задачі  $[\rho] = ML^{-2}$ . Може виникнути питання: чому важливо, що обтікання дозвукове? Тут справа в тому, що на підйомну силу впливає також стискаємість повітря, якою можна нехтувати лише для порівняно невеликих



швидкостей  $v$  (скажімо, до половини швидкості звуку). Для великих швидкостей цю стисливість треба враховувати і можна перевірити, що облік стискаємості зводиться до введення в число параметрів, що задаються, також і швидкості  $a$  звуку. Але тоді до критеріїв подібності, що характеризує форму профілю і напрямок потоку, що набігає, додається ще один - число Маха  $Ma = \frac{v}{a}$ . Таким чином, при швидкостях потоку, близьких до швидкості звуку або більших, для подібності двох процесів необхідно також збіг відповідних чисел Маха.

Розглянемо ще один приклад. Нехай залізнична цистерна, частково заповнена рідиною і котиться з постійною швидкістю  $v$ , раптово зупиняється, і нас цікавить виникає при цьому рух рідини. Якщо цистерна не має перегородок і внутрішньої арматури, то цей рух піддається досить точному розрахунку, в іншому випадку розрахунок трудний. Але можна провести спостереження на моделі, виготовленої з точним дотриманням пропорцій з геометричним коефіцієнтом подібності  $k_l$ . Виникають питання: якою повинна бути швидкість  $v_m$  моделі; чи потрібно замінити рідину; як перерахувати час фаз процесу з моделі на натуру і т.д. Ці питання вирішуються за допомогою аналізу розмірностей. На першій стадії процесу, поки загасанням коливань можна знехтувати, істотні тільки сили інерції і гравітації, а заданими параметрами, при точному дотриманні геометричної подоби (включаючи збереження коефіцієнта заповнення цистерни рідиною), можна вважати характерну довжину  $l$  цистерни, швидкість  $v$ , щільність  $\rho$  рідини і прискорення  $g$  земного тяжіння. Для них є єдиний критерій подібності, за який можна прийняти число Фруда  $Fr = gl/v^2$ . Таким чином, якщо ми хочемо дотримати подобу процесів, то, поклавши для моделі  $l_m = k_l l$ , ми повинні покласти і  $v_m = k_v v$ , де  $k_v = \sqrt{k_l}$ . Далі, ми бачимо, що густина рідини на даній стадії несуттєва. Крім того, позначивши буквою  $t$  час якої фази процесу, отримуємо безрозмірну комбінацію  $l/gt^2$ , рівність якої

для моделі і натури призводить до співвідношенню  $t_m = k_t t$ , де  $k_t = \sqrt{k_l}$ , звідки виводимо формулу для перерахунку часу:  $t = t_m / \sqrt{k_l}$

Якщо ми розглядаємо більший проміжок часу, щоб досліджувати загасання коливань, то треба врахувати і в'язкість рідини. Ця в'язкість характеризується кінематичним коефіцієнтом  $\nu$ , який треба зарахувати до заданих параметрах процесу. Так як  $[\nu] = L^2 T^{-1}$ , то тут з'являється ще один критерій подібності - число Рейнольда  $Re = \nu l / \nu$ , яке теж треба зберегти при переході до моделі. Звідси отримуємо, що повинно бути  $\nu_m = k_\nu \nu$ , де  $k_\nu = k_v k_l = k_l^{3/2}$ . Таким чином, для дотримання подоби в'язкості в моделі треба її істотно зменшити: наприклад, якщо модель менше оригіналу в 10 разів, то кінематичну в'язкість рідини при переході від оригіналу до моделі треба зменшити в  $10^{3/2} \approx 32$  рази, що приблизно відповідає переходу від нафти до води. Відзначимо ще, що модель не повинна бути занадто малою, щоб у ній не стали грати істотну роль капілярні сили. У самому справі, ці сили пропорційні площі вільної поверхні рідини, тобто квадрату лінійного розміру, тоді як об'ємні сили пропорційні кубу цього розміру. Тому при зменшенні розмірів капілярні сили стають переважаючими.

## 6.7 Матеріали для повторення

### 6.7.1 Рівняння які допускають зниження порядку

1. Якщо в рівняння не входить шукана функція  $y$ , тобто воно має вид  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ , то порядок рівняння можна понизити, взявши за нову невідому функцію найменшу із похідних які входять в рівняння, тобто зробивши заміну  $y^{(k)} = z$ .

2. Якщо рівняння не входить незалежне змінне  $x$ , тобто рівняння має вид  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , то порядок рівняння можна понизити, взявши за нове незалежне змінне  $y$ , а за невідому функцію  $y' = p(y)$ .

Приклад. Розв'язати рівняння  $2yy'' = y^2 + 1$

В рівняння не входить  $x$ . Припускаємо  $y' = p(y)$ . Тоді

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' p$$

Підставляючи  $y' = p$  і  $y'' = pp'$  в рівняння, отримаємо  $2ypp' = p^2 + 1$ . Порядок рівняння понижено. Розв'язавши отримане рівняння, знайдемо  $p = \pm \sqrt{Cy - 1}$ . Отже,  $y' = \pm \sqrt{Cy - 1}$ . Із цього рівняння отримаємо  $4(Cy - 1) = C^2(x + C_2)$ .

3. Якщо рівняння однорідне відносно  $y$  і його похідних, тобто не змінюється при одночасній заміні  $y, y', y'', \dots$  на  $ky, ky', ky'', \dots$ , то порядок рівняння понижується підстановкою  $y' = yz$ , де  $z$  – нова невідома функція.

4. Порядок рівняння понижується, якщо воно є однорідним відносно  $x$  і  $y$  в узагальненому сенсі, тобто не змінюється від заміни  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $k^m y$  (при цьому  $y'$  замінюється на  $k^{m-1}y'$ ,  $y''$  – на  $k^{m-2}y''$  і т.д.). Для того щоб дізнатись, чи буде рівняння однорідним, і знайти число  $m$ , потрібно прирівняти один до одного показники степенів, в яких число  $k$  буде входить в кожний член рівняння після вказаної вище заміни. Наприклад, в перший член рівняння  $2x^4 y'' - 3y^2 = x^4$  після цієї заміни число  $k$  буде входить в степені  $4 + (m-2)$ , в другий – в степені  $2m$ , в третій – в степені 4. Звідси,  $m$  повинно задовольняти рівнянням

$$4 + (m-2) = 2m = 4$$

Звідси  $m = 2$ . Якщо ж, отримані рівняння для  $m$  будуть несумісними, то диференціальне рівняння не являється однорідним в вказаному сенсі.

Після того як знайшли число  $m$ , потрібно зробити заміну змінних, де  $z = z(t)$  – нова невідома функція, а  $t$  – нова незалежна змінна. Отримаємо рівняння, в яке не входить незалежна змінна  $t$ . Порядок такого рівняння знижується одним з раніше переглянутих способів.

5. Порядок рівняння легко понижується, якщо вдається перетворити рівняння до такого виду, щоб обидві його частини являлись повними похідними по  $x$  від яких-небудь функцій. Наприклад, нехай дано рівняння  $yy'' = y'^2$ . Ділячи обидві частини на  $yy'$ , отримаємо

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}; (\ln y')' = (\ln y)'; \ln y' = \ln y + \ln C; y' = yC. \text{ Порядок рівняння знижено.}$$

### 6.7.2 Завдання

Розв'язати рівняння

$$1. x^2 \cdot y'' = y'^2$$

$$2. y'^3 + xy'' = 2y'$$

$$3. y \cdot y'' + y'^2 = 1$$

$$4. yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$5. 4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$$



$$\begin{aligned} 1,756x + 2,315y &= 4,726 \\ 1,261x + 1,662y &= 3,393 \end{aligned} \quad (7.3)$$

ІІ розв'язок з точністю до  $10^{-3}$  таке:  $x = 0,246; y = 1,857$ . Але замінивши праву частину другого рівняння на 3,394, ми отримаємо розв'язок  $x = 36362; y = -0,509$ . Ясно, що ці результати не вселяють довіри. До речі, обчислення «вручну» одразу показують, в чому суть: визначник системи дрівнює -0,000743, тобто формально і не дорівнює 0, але близько до нього, а значить, рівняння «майже залежні». Але ЕОМ, якщо не прийняти необхідних запобіжних заходів, видасть кожний з результатів з усіх результатів як достовірний.

Є багато способів розпізнання погано обумовленої системи рівнянь. Найпростіший з них заключається в перерахунку розв'язків при довільній зміні вихідних даних в рамках їх точності. Якщо при цьому виявиться, що незадовільний розкид результатів, то зазвичай намагаються якимось істотно змінити систему рівнянь задачі, іншими словами, замінити математичну модель.

Приклад, що розглянуто (7.3) має просте геометричне пояснення. Кожне з рівнянь системи (7.3) визначає пряму на площині декартових координат  $x, y$ , так що задача полягає в знаходженні точки перетину двох прямих. В даному прикладі ці пряма перетинаються під значно малим кутом (менше 0,5 кутової хвилини). Незначній зміні правої частини відповідає незначне перенесення прямої на поперечному напрямі. Але при такому перенесенні точка перетину прямих може значно зміститись.

Нелінійне рівняння (7.1) розв'язують в основному «вручну», а систему виду (7.2) – на ЕОМ зазвичай за допомогою одного із варіантів метода Ньютона. Але при цьому число невідомих та рівнянь, при якому система допускає ефективне розв'язання, в загальному випадку значно знижується в порівнянні з лінійним випадком, до значення порядку 10. Але, багато що залежить від вибору нульового наближення: вдалий вибір, який ґрунтується на

прикидці або неформальному міркуванні, може «розколоти» та систему з багатою кількістю рівнянь, а також значно зменшити число ітерацій.

Якщо система кінцевих рівнянь включає в себе параметри її розв'язок при деякому значенні параметра відомо, то для отримання розв'язку при інших значеннях параметру можна застосувати метод продовження рішення по параметру. Цей метод ми пояснимо на прикладі системи:

$$f(x, y; t) = 0, g(x, y; t) = 0 \quad (7.4)$$

З параметром  $t$ . Нехай відомим значенням розв'язку при  $t=t_0$ :

$$x = x_0 \quad y = y_0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad (7.5)$$

Щоб знайти розв'язок системи (7.4) при інших значення  $t$ , про диференціюємо рівняння (7.4) по  $t$ , рахуючи в них  $x$  та  $y$  функціями  $t$ ; отримуємо:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y; t) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y; t) \frac{dy}{dt} &= -f'_t(x, y; t) \\ g'_x(x, y; t) \frac{dx}{dt} + g'_y(x, y; t) \frac{dy}{dt} &= -g'_t(x, y; t) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Ці рівності утворюють систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $\frac{dx}{dt}$  і  $\frac{dy}{dt}$  і тому визначають ці похідні як функції коефіцієнтів і правих частин, тобто в кінцевому результаті як функції  $x$ ,  $y$ ,  $t$ . Для системи (7.6) вираз цих функцій неважко виписати явно, але, в такому записі немає необхідності. Таким чином, ми підходимо до системи двох диференціальних рівнянь відносно функції  $x(t)$  і  $y(t)$ . Розв'язок її чисельно при початкових умовах (7.5), ми одержуємо шукане розв'язання системи (7.4) – в будь якому випадку, поки розв'язання не відійде в нескінченність або поки визначник системи (7.6) не стане близьким до 0, що завжди являється ознакою критичної ситуації. Відмітимо, що в процесі продовження бажано час від часу проводити уточнювання розв'язання – наприклад, по методу Ньютона.

Схожий метод поступової перебудови відомого розв'язання застосовується і для більш складних задач, включаючи диференціальні, інтегральні рівняння і ін. Його можна використати в випадку, коли в поставлену задачу параметр не входить: тоді він вводиться штучно, щоб при





$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Где  $I$ - одинична матриця порядку  $m$ . В курсах числових методів і в спеціальній літературі показано ряд методів його розв'язання.

В закінченні зазначимо, що для знаходження  $n$  величин в принципі достатньо  $n$  незалежних кінцевих рівнянь, але ці всі рівняння виписуються з заданою похибкою, то в ряді випадків для підвищення достовірності відповіді кількості рівнянь збільшують. Тоді задача про розв'язання системи рівнянь перетворюється в задачу про їх найкраще спільне наближене задоволення, що можна зробити, наприклад, за допомогою одного з варіантів методу найменших квадратів.

## 7.2 Рівняння для функцій одного аргументу

Якщо для відповіді на поставлені питання необхідно попередньо знайти ті чи інші функції, то кінцевих рівнянь зазвичай виявляється недостатньо і доводиться залучати рівняння більш складної структури. Тут ми розглянемо випадок, коли шуканими є функції одного аргументу.

Найбільш широко в додатках математики використовуються *диференціальні рівняння*. (Якщо хочуть підкреслити, що шуканої є функція одного аргументу, то кажуть: звичайні диференціальні рівняння.) Диференціальне рівняння порядку  $n$  в стандартній формі, тобто розв'язане відносно старшої похідної шуканої функції, має в загальному випадку вид

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\right). \quad (7.7)$$

При цьому незалежну змінну (тут  $t$ ) зручно трактувати як час; до речі, в додатках вона найчастіше таким і є. (Втім, нерідкі й випадки, коли вона має сенс геометричної координати або - рідше – який-небудь інший зміст.)

$$u = u_0, \quad \frac{du}{dt} = \left( \frac{du}{dt} \right)_0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} = \left( \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} \right)_0 \quad (npu \ t = t_0),$$

Аналогічний вигляд мають системи диференціальних рівнянь з декількома шуканими функціями, число яких повинно дорівнювати числу рівнянь. Кожну таку систему (а тому і рівняння (7.7)) легко за допомогою введення нових шуканих функцій звести до системи рівнянь першого порядку, що досить часто роблять. Система першого порядку розмірності  $i$  в стандартній формі має в загальному випадку вид

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \\ &\vdots \\ \frac{du_n}{dt} &= f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n).\end{aligned}$$

106

$$u_1 = (u_1)_0, u_2 = (u_2)_0, \dots, u_n = (u_n)_0 \quad (\text{при } t = t_0)$$

Система диференціальних рівнянь, що описує еволюцію механічної системи під дією зовнішніх і внутрішніх сил, повинна, як правило, містити стільки незалежних рівнянь другого порядку, скільки ця система має ступенів свободи. Якщо відбувається перехід до фазових координат, то рівняння виявляються першого порядку, а їх число подвоюється. Таким чином, значення числа ступенів свободи механічної системи дозволяє проконтролювати повноту її математичної моделі.

Для диференціального рівняння та системи таких рівнянь рідко вдається отримати розв'язання, що нас цікавить точно, у вигляді формули. (Виняток становить важливий клас лінійних рівнянь і систем з постійними коефіцієнтами, а також деякі набагато більш вузькі класи рівнянь першого та другого порядків, які можна знайти в поширених підручниках і довідниках.) Однак цей недолік компенсується наявністю великої кількості ефективних методів наближеної побудови розв'язків, а також асимптотичних та якісних методів їх дослідження.

Методи наближеної побудови розв'язків диференціальних рівнянь, як і інших рівнянь, в яких шуканими є функції, можна умовно поділити на неперервні і дискретні; в перших розв'язання будується як функція неперервного аргументу, у других - дискретного. Типовими неперервними методами є різні варіанти методи Гальоркіна та інші методи, в яких шляхом підбору параметрів у формулі для наближеного розв'язання виконують «виправлення» нев'язки. (Нагадаємо, що *нев'язкою* називається різниця між лівою і правою частинами рівняння після підстановки в нього наближеного розв'язання; для точного розв'язання нев'язка дорівнює нулю.) Ці методи широко застосовуються при розв'язанні крайових задач.

Типовими дискретними методами є методи Рунге - Кутта, Адамса і інші подібні методи, особливо зручні при роботі на ЕОМ. У цих методах значення наближеного розв'язання будується в точках  $t_0, t_1 = t_0 + \tau, t_2 = t_0 + 2\tau, \dots, t_k = t_0 + k\tau, \dots$ , де  $\tau > 0$  - обраний крок методу.

Диференціальне рівняння (7.7) за певним правилом, різному для різних методів, замінюється на *різницеве рівняння* виду

$$u_{k+r} = \varphi(u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+r-1}, k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (7.8)$$

де розуміється значення наближеного розв'язання при  $t = t_k$ ; тоді говорять про *явно  $r$ -кроковому різницевому методі*. (Так, метод Рунге - Кутта розв'язання диференціального рівняння першого порядку є одно кроковим, а метод Адамса – чотири кроковий.) Іноді виявляється більш зручним перейти до різницевого рівняння виду

$$\Phi(u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+r-1}, u_{k+r}, k) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.9)$$

- це *неявний  $r$ -кроковий метод*. Для неявного методу на кожному кроці доводиться вирішувати кінцеве рівняння відносно  $u_{k+r}$ , але виявляється, що це ускладнення може з лишком викупатися можливістю збільшення  $\tau$  і тим самим зменшенням числа кроків для досягнення розумної точності.

Дискретні методи особливо зручні при вирішенні задачі Коші. У самому справі, визначивши спочатку значення  $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}$  (маються на увазі способи, як це зробити), ми можемо, поклавши  $k = 0$ , знайти значення  $u_r$ ; потім, поклавши  $k = 1$ , знайти  $u_{r+1}$  т. д., поки не пройдемо весь інтервал, що нас цікавить зміни змінної  $t$ . У разі крайової задачі значення  $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}$  безпосередньо визначити не можна і сукупність рівнянь (7.8) для всіх необхідних значень  $k$  доводиться розглядати як систему кінцевих рівнянь спеціального виду, причому дуже високої розмірності.

В останні роки в додатках математики широко поширилися *диференційно-функціональні рівняння* (інакше - *диференціальні рівняння з аргументом що відхиляється*). Як правило, це рівняння *запізнілого типу* або *нейтрального типу*, простими представниками яких в разі рівнянь першого порядку можуть служити відповідно рівняння

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h))$$

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h), u'(t-h))$$

(штрихом позначена похідна;  $h > 0$  - задана постійна). Такі рівняння з'являються, якщо в системі що модулюється є елемент затримки, в результаті дії якого швидкість еволюції системи визначається її станом не тільки в поточний момент  $t$ , але і в попередній момент  $t - h$ . Диференційно-функціональні рівняння широко застосовуються в теорії регулювання, математичній біології, медицині, економіці та ін.

Методи наближеної побудови та дослідження рішень диференційно-функціональних рівнянь зараз розвинені близько до відповідних їм методах для звичайних диференціальних рівнянь, які наведені в спеціальній літературі. Однак поява «запізнювання»  $h$  деколи приводить не тільки до кількісних, але і до якісних змін постановок задач і властивостей їх розв'язань. Так, в якості початкової умови для рівнянь першого порядку задається не тільки значення  $u(t_0)$ , як для звичайних рівнянь, а всі значення шуканої функції  $u(t)$  при  $t_0 - h \leq t \leq t_0$ ; при заданій початковій умові рівняння може вирішуватися не в обидві сторони, як зазвичай, а тільки «вперед» по  $t$  і т. д. Як і для випадку звичайних рівнянь, найбільш ефективно застосування лінійних рівнянь або систем з постійними коефіцієнтами. Зокрема, питання про стійкість системи, описуваної таким рівнянням, повністю вирішується на основі аналізу коренів відповідного характеристичного рівняння, яке, щоправда, виявляється не алгебраїчним, як для звичайного диференціального рівняння, а трансцендентним.

Реальні об'єкти можуть описуватися диференційно-функціональними рівняннями і більш складної структури, ніж наведена вище. Зокрема, рівняння може включати не одне, а кілька дискретних запізнювань, а також «розподілене запізнювання». Це призводить до *інтегро-диференціальних рівнянь*. У лінійному випадку таке рівняння може, наприклад, мати вигляд

$$u'(t) = \int_{t_0}^t K(t, s) u(s) ds + f(t) \quad (t \geq t_0)$$

(задана функція  $K$  називається ядром цього рівняння); воно описує системи, що володіють пам'яттю. Інтегро-диференціальні рівняння можуть мати і більш складний вид.

Застосовуються і «чисто» *інтегральні рівняння*, найчастіше - *рівняння Фредгольма другого роду*, тобто рівняння виду

$$u(t) = \int_{\alpha}^t K(t,s)u(s) ds + f(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

і *рівняння Вольтерра другого роду*, що мають вигляд

$$u(t) = \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)u(s) ds + f(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

(Відповідні *рівняння першого роду* виходять, якщо ліву частину замінити нулем.) При математичному моделюванні коливань суцільних середовищ зустрічається відповідна *задача на власні значення*

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)u(s) ds = \lambda u(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

*Власним значенням ядра  $K$* , що визначає частоту так званих нормальних коливань середовища, називається будь-яке значення  $\lambda$ , при якому останнє рівняння має ненульові розв'язання; самі ці розв'язання, що визначають *моди* (форми) таких коливань, називаються *власними функціями*; при цьому незалежною змінною служить геометрична координата.

### 7.3 Рівняння для функцій декількох аргументів

Якщо шуканою є функція декількох аргументів, то диференціальне рівняння стає *рівнянням з частинними похідними*; такі рівняння традиційно називаються також *рівняннями математичної фізики*. Вони природно з'являються в задачах, пов'язаних з механікою суцільного середовища, теорією тепломасообміну, теорією електромагнітних полів і т. д., причому незалежними

змінними найчастіше, служать геометричні координати і в разі еволюційних задач час.

Рівняння з частинними похідними, що застосовуються при вирішенні технічних задач, підрозділяються на два класи: рівняння, що описують стаціонарний стан середовища, і *еволюційні рівняння*, що описують розвиток процесу в ній. Серед рівнянь першого класу найбільш широко відомі *рівняння Лапласа і Пуассона*, що мають для просторових задач, відповідно, вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z). \quad (7.10)$$

Ці рівняння, а також їх одномірні і двомірні варіанти застосовуються при описанні напруженого стану однорідних ізотропних пружних тіл, стаціонарних течій ідеальної нестисливої рідини, стаціонарного розподілу температури, електричних і магнітних полів і т. д. При вивченні прогину плоскої однорідної пластинки застосовуються також рівняння

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = 0, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = f(x, y). \quad (7.11)$$

Якщо розглядається неоднорідне середовище або неплоска пластинка, то рівняння залишаються лінійними, але коефіцієнти при похідних перестають бути постійними. Зустрічаються і більш складні рівняння і системи рівнянь із частинними похідними; зокрема, при розгляді великих деформацій, течій стисливого середовища та ін. рівняння стають нелінійними. При застосуванні систем рівнянь із частинними похідними треба стежити, щоб число незалежних рівнянь дорівнювало числу шуканих функцій.

Для рівнянь стаціонарного стану додатковими зазвичай служать *краєві умови*, що відображають ситуацію на границі  $(\partial D)$  області  $(D)$ , в якій будується розв'язання. Так, для рівнянь (7.10) найбільш часто на  $(\partial D)$  задаються значення або  $u$ , або  $\frac{\partial u}{\partial n}$  (похідна по зовнішній нормалі до  $(\partial D)$ ), або лінійна комбінація  $u$  і  $\frac{\partial u}{\partial n}$  - це відповідно *краєві умови першого, другого і третього родів*. Для рівнянь (7.11) краєва умова складається вже з двох рівностей: наприклад, в разі жорсткого закладання на  $(\partial D)$  задаються значення  $u$  і  $\frac{\partial u}{\partial n}$ .

Серед еволюційних рівнянь найбільш часто застосовуються *хвильове рівняння* і *рівняння теплопровідності*, що мають для просторових задач, відповідно, вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (7.12)$$

( $a$  - константа, рівна швидкості розповсюдження хвиль для розглянутого процесу). Для таких рівнянь зазвичай ставиться початкова умова, що відображає початковий стан модельованого процесу. Для рівняння (7.12) воно полягає у заданні  $u$  і  $\partial u / \partial t$  при деякому початковому значенні  $t = t_0$ . Якщо для проведеного дослідження суттєва ситуація на границі області, в якій відбувається процес, то задаються ще граничні умови, про які йшлося в попередньому абзаці; тоді говорять про *початково-краєві задачі*.

Останнім часом досить широко поширилися нестационарні задачі в областях зі змінною границею, причому закон зміни границі заздалегідь не заданий, а визначається попутно з побудовою всього розв'язання. Такі задачі виникають при дослідженні нестационарних рухів рідини або сипучого середовища з вільною поверхнею, переходу середовища з однієї фази в іншу (це «задача Стефана») і т. д. Для них на невідомій границі задається ще одна додаткова умова типу рівності, яка разом з іншими умовами і дає можливість знайти границю. Зустрічаються і стаціонарні задачі з невідомими границями.

Проміжне положення між стаціонарними і еволюційними задачами займають задачі на власні значення.

Точне розв'язання задачі для рівняння з частковими похідними у вигляді явної формули, що навіть включає інтеграли або суми нескінченних рядів, можливо лише для рівнянь і областей спеціального вигляду; цією можливістю не слід нехтувати, оскільки при її реалізації розв'язання іноді вдається досліджувати найбільш повно. Часом вдається знайти точні формули для рішень спеціального виду - наприклад, стаціонарних (тобто не залежних від часу) для еволюційних задач, або не залежних від просторових координат, або автомодельних, або типу бігучих або стоячих хвиль і т. п. З таких формул зазвичай вдається зробити корисні висновки.



Частіше застосовується наближена побудова рішень, методи якого, як і для звичайних диференціальних рівнянь, можна підрозділити на неперервні і дискретні. Втім, ряд наближених методів має і дискретні і неперервні риси; до таких методів відноситься *метод прямих*, в якому виробляється дискретизація всіх незалежних змінних, крім однієї, в результаті чого задача зводиться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь; дискретні і неперервні риси має також широко популярний нині метод кінцевих елементів, найбільш пристосований до вирішення рівнянь в областях складної конфігурації.

Звісно, що труднощі наближеного розв'язування задачі значно підвищуються зі зростанням її *геометричної розмірності*, під якою розуміється число суттєвих геометричних координат, тобто мінімальне число таких (можливо, криволінійних) координат, за допомогою яких виписуються всі умови задачі і її розв'язання.

Якщо одномірні задачі порівняно прості, а двомірні найчастіше піддаються вирішенню на ЕОМ середньої потужності, то для суттєво тривимірних задач обсяг обчислень зазвичай буває великий і вимагає застосування потужних ЕОМ. Тому дуже бажано можливе пониження геометричній розмірності задачі, тобто перехід від трьохмірної задачі до двомірної або від двомірної - до одномірної, якщо це можна зробити без істотної втрати адекватності. Іноді це вдається зробити за допомогою введення спеціальних систем координат, іноді - за допомогою позначення параметром однієї з координат, від якої залежність вирішення порівняно повільна, і т. п. Подібне пониження геометричній розмірності застосовується, зокрема, в теорії приграничних шарів.

Розв'язання еволюційної задачі на обмеженому інтервалі часу, як і задача Коші для рівняння (7.7), зводиться до послідовної перебудови початкової умови кроками у часі; для цього розроблені різноманітні ефективні методи. Розв'язання стаціонарної задачі після дискретизації координат зводиться до

розв'язання системи кінцевих рівнянь, число яких дорівнює числу вузлових точок в області, де будуватиметься розв'язання, тобто зазвичай достатньо велике.

## 7.4 Матеріали для повторення

### 7.4.1 Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами

1. Щоб розв'язати лінійне однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

треба скласти характеристичне рівняння

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2)$$

і знайти всі його корені  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Загальний розв'язок рівняння (1) є сума, що складається з доданків вигляду  $C_i e^{\lambda_i x}$  для кожного простого кореня  $\lambda_i$  рівняння (2) і доданків вигляду

$$(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \dots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x} \quad (3)$$

для кожного кратного кореня  $\lambda$  рівняння (2), де  $k$  - кратність кореня. Всі  $C_i$  - довільні сталі. Коефіцієнти рівняння (1) і корені  $\lambda$  тут можуть бути дійсними або комплексними.

Якщо ж всі коефіцієнти рівняння (1) дійсні, то розв'язання можна написати в дійсній формі та у разі комплексних коренів  $\lambda$ . Для кожної пари комплексних спряжених коренів  $\lambda = \alpha \pm \beta_i$  у формулу спільного розв'язання включаються доданки

$$C_{m+1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

якщо ці корені прості, і складові

$$P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x) \sin \beta x,$$

якщо кожен з коренів  $a + \beta_i$  і  $a - \beta_i$  має кратність  $k$ . Тут  $P_{k-1}$  і  $Q_{k-1}$  - многочлени степені  $k - 1$ , аналогічні многочлену (3), їх коефіцієнти – довільні сталі.

П р и к л а д. Вирішити рівняння  $y^{(V)} - 2y^{(IV)} - 16y' + 32y = 0$ .

Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0.$$

Розкладаючи ліву частину на множники, знаходимо корені:

$$(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0, \quad (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = 2i, \quad \lambda_5 = -2i.$$

По наведеним вище правилам пишемо загальне розв'язання

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$$

(ступінь многочлена  $C_1 + C_2 x$  на 1 менша кратності кореня  $\lambda_2 = 2$ ).

2. Для лінійних неоднорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами і з правою частиною, що складається із сум та добутків функцій  $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ ,  $e^{ax}$ ,  $\cos \beta x$ ,  $\sin \beta x$ , частинний розв'язок можна шукати методом невизначених коефіцієнтів.

Для рівнянь з правою частиною  $P_m(x)e^{\gamma x}$ , де  $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ , частинний розв'язок має вигляд

$$y_1 = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}, \quad (4)$$

де  $Q_m(x)$  - многочлен тієї ж степені  $m$ . Число  $s = 0$ , якщо  $\gamma$  - не корінь характеристичного рівняння (2), а якщо  $\gamma$  - корінь, то  $s$  рівне кратності цього кореня. Щоб знайти коефіцієнти многочлена  $Q_m(x)$ , необхідно розв'язання (4) підставити в диференціальне рівняння та прирівняти коефіцієнти при подібних членах в лівій та правій частинах рівняння.

Якщо в праву частину рівняння входять синус і косинус, то їх можна виразити через показову функцію за формулами Ейлера

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \quad (5)$$

і звести задачу до вже розглянутого випадку.

Якщо ж коефіцієнти лівої частини рівняння дійсні, то можна обійтися без переходу до комплексних функцій (5). Для рівняння з правою частиною

$$e^{ax}(P(x)\cos \beta x + Q(x)\sin \beta x) \quad (6)$$

можна шукати частинний розв'язок у вигляді

$$y_1 = x^s e^{ax}(R_m(x)\cos \beta x + T_m(x)\sin \beta x), \quad (7)$$

де  $s = 0$ , якщо  $a + \beta i$  не корінь характеристичного рівняння, і  $s$  рівне кратності кореня  $a + \beta i$  в іншому випадку, а  $R_m$  і  $T_m$  - многочлени степені  $m$ , рівній найбільшій з степенів многочленів  $P$  і  $Q$ . Щоб знайти коефіцієнти многочленів  $R_m$  і  $T_m$ , необхідно підставити розв'язок (7) в рівняння і прирівняти коефіцієнти при подібних членах.

Ще один метод знаходження часткового розв'язку рівняння з дійсними коефіцієнтами та правою частиною виду (6) полягає в наступному. Спочатку розв'язують рівняння з правою частиною  $P(x)e^{(a+\beta i)x}$ . Дійсна частина цього розв'язку буде розв'язком рівняння з правою частиною  $P(x)e^{ax}\cos \beta x$ , а комплексна - розв'язком рівняння з правою частиною  $P(x)e^{ax}\sin \beta x$ .

Якщо права частина рівняння дорівнює сумі декількох функцій виду  $P(x)e^{\gamma x}$  і виду (6), то частковий розв'язок знаходиться за наступним правилом.

Частковий розв'язок лінійного рівняння з правою частиною  $f_1 + \dots + f_p$  дорівнює сумі часткових розв'язків рівнянь з тією ж лівою частиною і правими частинами  $f_1, \dots, f_p$ .

Загальне розв'язання лінійного неоднорідного рівняння у всіх випадках дорівнює сумі часткового вирішення цього рівняння і спільного розв'язання однорідного рівняння з тією ж лівою частиною.

Приклад. Вирішити рівняння.

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x. \quad (8)$$

Характеристичне рівняння  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$  має корінь  $\lambda = 3$  кратності 2 і корінь  $\lambda = 0$  кратності 1. Тому загальне розв'язання однорідного рівняння має вигляд  $y_o = (C_1 + C_2x)e^{3x} + C_3$ .

Права частина (8) складається з двох доданків типу (6); для першого  $\gamma = \alpha + \beta i = 3$ , а для другого  $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ . Так як ці числа різні, то треба шукати окремо часткові розв'язання рівняння

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}, \quad (9)$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x} \cos 2x. \quad (10)$$

Числа  $\gamma = 3$  є коренем кратності  $s = 2$ , тому часткове розв'язання рівняння (9) згідно (4) має вигляд  $y_1 = x^2(ax + b)e^{3x}$ . Підставимо  $y = y_1$  в (9), знайдемо  $a = 1/18, b = -1/18$ .

Далі, число  $\alpha + \beta i = 3 + 2i$  не є коренем характеристичного рівняння, тому часткове розв'язання рівняння (10) згідно (7) має вигляд  $y_2 = e^{3x}(c \cos 2x + d \sin 2x)$ . Підставим  $y = y_2$  в (10), знайдемо  $c = -3/52, d = -1/26$ .

Загальне розв'язання рівняння (8) дорівнює  $y = y_o + y_1 + y_2$ , де  $y_o, y_1, y_2$  вже знайдені.

### 3. Лінійне неоднорідне рівняння

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (11)$$

з будь-якою правою частиною  $f(x)$  вирішується методом варіації сталих. Нехай знайдене загальне розв'язання  $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$  лінійного однорідного рівняння з такою ж лівою частиною. Тоді розв'язання рівняння (11) шукається у вигляді

$$y = C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n.$$

Функції  $C_i(x)$  визначаються із системи:

$$C'_1 y_1 + \dots + C'_n y_n = 0$$

$$C'_1 y'_1 + \dots + C'_n y'_n = 0$$

.....

$$C'_1 y_1^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0$$

$$a_0 (C'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)}) = f(x).$$

### 4. Рівняння Ейлера

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (12)$$

зводиться до лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами заміною незалежної змінної  $x = e^t$  при  $x > 0$  (або  $x = -e^t$  при  $x < 0$ ). Для отриманого рівняння з постійними коефіцієнтами характеристичного рівняння має вигляд

$$a_0 \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1) + \dots + a_{n-2} \lambda(\lambda - 1) + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

При складанні цього рівняння кожний добуток  $x^k y^{(k)}$  в (12) замінюють на добуток  $k$  зменшуючись на 1 число:  $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - k + 1)$ .

Приклад. Вирішити рівняння.

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3. \quad (13)$$

Одразу запишемо характеристичне рівняння і вирішимо його:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0, \quad (14)$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$$

При таких  $\lambda$  загальне розв'язання однорідного рівняння з постійними коефіцієнтами має вигляд (згідно п.1)

$$y_0 = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}.$$

Для того, щоб вирішити рівняння (13), спочатку розкриємо дужки в (14):  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ . По цьому характеристичному рівнянню складаємо ліву частину диференціального рівняння, а праву частину отримуємо з правої частини (13) заміною  $x = e^t$ :

$$y_t''' - 4y_t'' + 5y_t' - 2y = e^{3t}.$$

Так як число 3 не є коренем характеристичного рівняння, то часткове розв'язання шукаємо у вигляді  $y_1 = a e^{3t}$ . Підставляємо в рівняння, знаходимо  $a = 1/4$ .

Отже, загальне розв'язання має вигляд:

$$y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t} + 1/4 e^{3t} = (C_1 + C_2 \ln x) x + C_3 x^2 + 1/4 x^3 (x > 0).$$

При  $x < 0$  виходить аналогічна формула, але з  $\ln |x|$  замість  $\ln x$ .

5. Для розв'язання задач можна користуватися наступними законами теорії електричних кіл.

Для кожного вузла кола сума всіх втікаючих струмів дорівнює сумі втікаючих струмів.

Алгебраїчна сума напруг джерел струму, містяться в будь-якому замкнутому контурі кола, дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруг на всіх інших ділянках цього контуру.

Падіння напруги на опорі  $R$  дорівнює  $RI$ ; падіння напруги на самоіндукції  $L$  дорівнює  $L(dI/dt)$ ; падіння напруги на конденсаторі ємності  $C$  дорівнює  $q/C$ , де  $q = q(t)$  – заряд конденсатора в момент  $t$ ; при цьому  $dq/dt = I$ ; в усіх трьох випадках  $I = I(t)$  – сила струму, протікаючого через розглянуту ділянку кола в даний момент  $t$ . В цих формулах  $I$  виражається в амперах,  $R$  – в омах,  $L$  – в Генрі,  $q$  – в кулонах,  $C$  – в фарадах,  $t$  – в секундах, напруга – в вольтах.

Приклад. Послідовно включені: джерело струму, напруга, яка змінюється по закону  $E = V \sin wt$ , опір  $R$  і ємність  $C$ . Знайти силу струму в колі при усталеному режимі<sup>1</sup>.

Розв'язання. Сила струму  $I = I(t)$  на будь-якій ділянці кола одна і та ж (за законом при послідовному з'єднанні). Падіння напруги на опорі дорівнює  $RI$ , а на ємності  $q/C$ . Отже,  $RI + q/C = V \sin wt$ . Диференціюючи і користуючись тим, що  $dq/dt = I$ , отримаємо рівняння

$$R(dI/dt) + I/C = V w \cos wt. \quad (15)$$

Це лінійне рівняння з постійними коефіцієнтами. Для віднайдення сталого режиму знайдемо періодичне розв'язання цього рівняння. Виходячи з виду правої частини рівняння, шукаємо розв'язання у вигляді

$$I = A_1 \cos wt + B_1 \sin wt. \quad (16)$$

Підставляємо (16) в (15) и прирівнюємо коефіцієнти при подібних членах, отримаємо систему двох рівнянь, з якої можна знайти  $A_1$  и  $B_1$ . Але в електротехніці важливіше знати не коефіцієнти  $A_1$  и  $B_1$ , а амплітуду зміни сили струму. Тому вираз (16) переписують у вигляді:

$$I = A \sin (wt - \varphi) \quad (17)$$

Підставляємо (17) в (15), переходячи до тригонометричних функцій кутів  $wt$  і  $\varphi$ , прирівнюючи коефіцієнти спочатку при  $\sin wt$ , а потім при  $\cos wt$ , отримаємо:  $RAw \sin \varphi + (A/C) \cos \varphi = 0$ ,  $RAw \cos \varphi - (A/C) \sin \varphi = Vw$ .

Звідси знайдемо

$$\operatorname{tg} \varphi = -1/RC\omega, \quad A = V/\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}.$$

Пояснимо, чому знайдене періодичне розв'язання називається усталеним режимом. Загальне розв'язання рівняння (15) дорівнює сумі знайденого часткового розв'язання (17) і спільного розв'язання лінійного однорідного рівняння.

$$R(dI/dt) + I/C = 0. \quad (18)$$

Так як розв'язання рівняння (18)  $I = Ke^{-t/RC}$  ( тут  $K$  – довільна стала) прямує до нуля при  $t \rightarrow +\infty$  необмежено наближається (і притому досить швидко) до знайденого періодичного розв'язання (17).

#### 7.4.2 Завдання

1.  $y'' + y' - 2y = 0$
2.  $y'' - 2y' = 0$
3.  $y'' - 8y = 0$
4.  $y'' + 2y' + 10y = 0$
5.  $y^{IV} + 64y = 0$
6.  $y'' - y = 2e^x - x^2$
7.  $y'' - 3y' + 2y = \sin x$



## 8. ОСНОВНІ ТИПИ РІВНЯНЬ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В ЯКОСТІ КОМПОНЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

### 8.1 Задачі на екстремум зі скінченним числом степенів свободи

При математичному моделюванні широко застосовуються задачі на екстремум. Ці задачі можна умовно поділити на два класи: задачі зі скінченним числом степенів свободи, для яких шуканими є точка екстремуму та екстремальне значення функції скінченного числа аргументів, і задачі на екстремум функціонала, в яких шуканою є функція. (Для задач другого класу зазвичай кажуть про цільовий функціонал.) Ми розглядатимемо лише задачі на мінімум, оскільки задачі на максимум зводяться до них зміною знаку цільової функції.

Знаходження мінімуму функції одного аргумента, тобто вирішення задачі

$$f(x) \rightarrow \min, \quad a \leq x \leq b,$$

для функцій  $f$  простого виду можна здійснити з допомогою вирішення рівняння  $f'(x) = 0$  і дослідження знаку  $f'$ . Для більш складних функцій  $f$  буває легшим вичисляти послідовні значення  $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots$  з достатньо малим кроком  $h$  та зрівнювати їх один з одним. Знайшовши точку мінімуму на вибраній сітці, можна для уточнення провести аналогічну процедуру на інтервалах довжини  $h$  в околі цієї точки, але суттєво зменшивши крок, і т. д. Існують способи, що дозволяють прискорити цей процес.

Мінімізацію функції  $n \geq 2$  аргументів пояснимо, взявши  $n = 3$ :

$$f(x, y, z) \rightarrow \min. \quad (8.1)$$

Найбільш зрозумілим є випадок, коли функція  $f$  визначена при всіх значеннях своїх аргументів та неперервна разом зі своїми власними похідними; тоді зазвичай застосовується один з методів спуску. Так, *метод найшвидшого спуску* заснований на тому, що антиградієнт функції  $f$ , тобто вектор  $-\text{grad } f$  з проєкціями

$$-f'_x(x, y, z), -f'_y(x, y, z), -f'_z(x, y, z),$$

вказує напрямок найшвидшого спадання цієї функції в точці  $(x, y, z)$ . Відправляючись від деякої початкової точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  в напрямку антиградієнта в ній та слідкуючи вздовж (прямої) лінії руху за значенням функції  $f$ , тобто перейшовши до функції одного аргументу

$$f_0(t) = f(x_0 - k_0 f'_x(x_0, y_0, z_0)t, \quad y_0 - k_0 f'_y(x_0, y_0, z_0)t, \quad z_0 - k_0 f'_z(x_0, y_0, z_0)t)$$

ми можемо знайти точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , в якій функція  $f$  мінімальна вздовж цієї лінії. Потім ми відправляємось від точки  $M_1$  в напрямку антиградієнта в ній, тобто знову переходимо до функції одного аргументу

$$f_1(t) = f(x_1 - k_1 f'_x(x_1, y_1, z_1)t, \quad y_1 - k_1 f'_y(x_1, y_1, z_1)t, \quad z_1 - k_1 f'_z(x_1, y_1, z_1)t)$$

і т. д. (Множники  $k_i$  вводяться для того, щоб при приближенні до точки мінімуму рух не занадто вповільнювався; наприклад, візьмемо  $k_i = (|grad f|_{M_i})^{-1}$ .)

Застосовуються й інші методи спуску: по координатний спуск, спуск по випадковим напрямкам та інші. Напрямок спуску може і неперервно підправлятися: так, в методі *градієнтного спуску* ми задаємо малий крок  $h$  та переходимо від точки  $M_i$  до точки  $M_{i+1}$  по формулам

$$x_{i+1} = x_i - k_i f'_x(x_i, y_i, z_i)h \quad \text{і аналогічно} \quad y_{i+1}, z_{i+1}.$$

Відома велика кількість варіантів цих методів, пристосованих до вирішення різних класів задач.

Функція  $f$  може мати декілька локальних мінімумів, а даний метод приводить лише до одного з них, що може бути не найглибшим. Для пошуку більш глибокого мінімуму можна спробувати повторити процес декілька разів, починаючи з різних точок  $M_0$ . Однак достатньо представницький вибір таких точок можна отримати, лише якщо число аргументів не надто велике – скажімо, порядку 10 або менше (чим менше, тим краще). Втім, вибір  $M_0$  в околі шуканої точки мінімуму дозволяє збільшити кількість аргументів та суттєво пришвидшити процедуру. Тому неформальні обговорення та прикидки, що дозволяють хоча б грубо нащупати шукану точку, є бажаними.

Якщо задача на мінімум має параметр, то можна, знайшовши точку мінімуму при деякому початковому значенні параметра, послідовно її перебудовувати, здійснюючи кроки по параметру. Втім, при такому продовженні точка мінімуму може для деякого критичного значення параметру зникнути; крім того, якщо мінімум, що розглядається був початково найглибшим, то в процесі продовження він може перестати бути таким.

Не менш часто зустрічаються задачі на умовний екстремум, в яких аргументи цільової функції зв'язані кінцевими рівняннями (зв'язками), причому число незалежних зв'язків має бути менше числа аргументів. Так, в задачі (8.1) може бути один або два таких зв'язки; розглянемо для визначеності випадок одного зв'язку

$$g(x, y, z) = 0, \quad (8.2)$$

отже повна задача має вигляд (8.1), (8.2). В ній залишається  $3 - 1 = 2$  степені свободи. Найбільш сприятливий випадок, коли сукупність рівнянь зв'язку можна замінити еквівалентним параметричним представленням аргументів. Для задачі (8.1), (8.2) це означає, що змінні  $x, y, z$ , що задовольняють рівняння (8.2), можна представити у вигляді

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Тоді розглянута задача зведеться до задачі на безумовний мінімум

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \rightarrow \min,$$

до якої можуть бути застосовані вказані вище методи.

Однак зазвичай такий перехід здійснити не вдається і тоді приходить проводити спуск в просторі аргументів вздовж поверхні  $(S)$ , визначеної рівнянням (8.2) (в загальному випадку - вздовж різноманіття, визначеного сукупністю рівнянь зв'язку). Так, в градієнтному методі ми, відправляючись від точки  $M_0 \in (S)$ , здійснюємо крок в напрямку  $-(grad f)_{M_0}$ , отримуємо точку  $\overline{M}_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1)$ , наближено проєктуючи яку на  $(S)$  (для цього приходить наближено вирішити кінцеве рівняння)

$$g(\overline{x}_1 - g'_x(x_0, y_0, z_0)t, \overline{y}_1 - g'_y(x_0, y_0, z_0)t, \overline{z}_1 - g'_z(x_0, y_0, z_0)t) = 0,$$

знаходимо точку  $M_1 \in (S)$ ,. Далі виконуємо ту ж процедуру, відправляючись з точки  $M_1$ , і т. д.

В останні роки в якості математичних моделей широко розповсюдились задачі на *екстремум з обмеженнями*, тобто задачі, в яких аргументи цільової функції зв'язані з кінцевими нерівностями (*вивільняючими зв'язками*), число яких на відміну від рівнянь зв'язку може бути будь-яким.

Деякі класи задач на знаходження екстремуму з обмеженнями розроблені особливо далеко. Так, якщо цільова функція є лінійною, як і всі рівняння та нерівності, що зв'язують її аргументи, то ми маємо задачу *лінійного програмування*. Існують стандартні програми для ЕВМ, що дозволяють вирішувати такі задачі, навіть якщо цільова функція має декілька сотень аргументів. Відомі також алгоритми вирішення задач лінійного *цілочисельного програмування*, тобто задач, для яких аргументи цільової функції за своїм значенням можуть приймати лише цілочисельні значення.

Якщо цільова функція та ліві частини вивільняючих зв'язків, записаних за зразком (8.2), є випуклими функціями, і всі інші невивільняючі зв'язки лінійні, то перед нами – задача *випуклого програмування*. При цьому функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається випуклою, якщо для будь яких  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$  виконана нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \dots, \frac{x_n + y_n}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n)].$$

(Для функції одного аргументу це означає, що її графік випуклий донизу; якщо ж функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  має неперервні похідні другого порядку, то її випуклість рівносильна невід'ємності всіх власних значень «матриці Гессе»  $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n$ .) Задачі випуклого програмування мають важливу властивість: вони не можуть мати більше одного розв'язку, і якщо він є, то метод спуску обов'язково приводить до нього. Задача випуклого програмування, для якої цільова функція квадратична, а вивільняючі зв'язки лінійні, називається задачею квадратичного програмування; для таких задач алгоритм розв'язку особливо стандартизований.

Насамкінець вкажемо на один специфічний клас задач з дискретним часом, для вирішення яких застосовується так званий *метод динамічного програмування*, отримав в останні роки різноманітні застосування. Нехай стан деякого об'єкту характеризується величиною  $x$  (неперервною або дискретною) і цей об'єкт потрібно перевести з заданого стану  $x_0$  в момент  $t_0$  в заданий стан  $x_N$  в момент  $t_N$ , підбравши для цього проміжні стани  $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$  в моменти  $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ . Нехай при цьому відома вартість  $f_i(x, y)$  переведення об'єкта з стану  $x$  в момент  $t_i$  в стан  $y$  в момент  $t_{i+1}$ . Задача заключається в тому, щоб мінімізувати загальну суму витрат:

$$f_0(x_0, x_1) + f_1(x_1, x_2) + \dots + f_{N-1}(x_{N-1}, x_N) \rightarrow \min.$$

В курсах динамічного програмування наводяться алгоритми вирішення даної задачі та споріднених їй задач, зокрема аналогічної задачі з неперервним часом.

Всі описані в цьому пункті задачі можуть включати ті або інші випадкові компоненти. Тоді значення цільової функції стає випадковою величиною і ціль задачі складається в мінімізації математичного очікування цієї величини.

## 8.2 Задачі на екстремум з шуканою функцією

Однією з наочніших задач про криву найшвидшого спуску, поставленої ще Галілеєм : серед усіх кривих, що лежать у площині  $x, y$  з вертикальною віссю  $y$  та маючи задані кінці  $A(a, h)$  та  $B(b, 0)$ , де  $a < b$ ,  $h > 0$ , знайти таку, рухаючись по якій під дією лише сили тяжіння, матеріальна точка, відправляючись з  $A$  без початкової швидкості, досягне  $B$  за мінімально можливий час.

Для формулювання математичної моделі припустимо, що деяка крива з кінцями  $A$  і  $B$  і з рівнянням  $y = y(x)$  задана; тоді можна перевірити, що час спуску нею рівний

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - y)$$

$$v = \sqrt{2g(h-y)}$$

$$dt = \frac{dS}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

де  $g$  – прискорення земного тяжіння. Цей інтеграл приймає певне значення, якщо функція  $y(x)$  задана. Подібного роду співвідношення, коли кожній функції з деякого класу відповідає певне значення деякої величини, називається *функціоналом*.

Таким чином, для функціоналу ті функції, на яких він визначений, є якби значеннями незалежної змінної. Щоб підкреслити цю обставину, будемо в цьому пункті, як це зараз часто роблять в математичній літературі, розрізняти значення  $y$  і  $y(x)$ , розуміючи  $y$  під (пишуть також  $y(\cdot)$ ) саму функцію як закон залежності, а під  $y(x)$  – значення цієї функції при значенні аргументу. Тоді сформульовану задачу можна, позначивши функціонал буквою  $f$ , записати у вигляді

$$f(y) := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2g[h - y(x)]}} dx \rightarrow \min$$

при заданих крайових умовах

$$y(a) = h, \quad y(b) = 0$$

Ця задача належить до наступного загального класу: знайти функцію  $y$ , для якої

$$f(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \rightarrow \min \quad (8.3)$$

при заданих крайових умовах

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (8.4)$$

Такі задачі вивчаються в курсах *варіаційного числення*, де розглядаються і різні варіанти: функціонал  $f$  може включати і похідні більш високого порядку функції  $y$ , функція може приймати векторні значення (іншими словами, шуканими будуть не одна, а декілька функцій) і залежати від декількох аргументів, крайові умови можуть бути задані не на всій границі або навіть

зовсім не задані і т. д. Розглядаються також задачі на умовний екстремум – наприклад, якщо в задачі (8.3), (8.4) задані одна або декілька додаткових умов вигляду

$$g(y) := \int_a^b G(x, y(x), y'(x)) dx = 0$$

Така варіаційна задача називається *ізопараметричною*; назва походить від наступної знаменитої задачі: серед усіх ліній заданої довжини на площині знайти таку, яка обмежує фігуру найбільшої площі.

Подібно до задач на екстремум зі скінченним числом степенів свободи задача (8.3), (8.4) більш проста, якщо функція  $F$  визначена для всіх значень своїх аргументів та має неперервні похідні. За цих припущень функція  $y$ , на якій функціонал приймає екстремальне значення, є стаціонарною точкою функціоналу  $f$ . (Це означає, що при малому варіюванні функції  $y$ , тобто при переході до функції  $y + \delta y$ , де  $\delta y$  і  $(\delta y)'$  малі, зі збереженням умов (8.4) значення функціоналу  $f$  змінюється на величину вищого порядку малості.) А з умови стаціонарності легко виводиться диференціальне рівняння – так зване *рівняння Ейлера*, - яке повинна задовольняти шукана функція  $y$ . Так, для функціоналу (8.3) рівняння Ейлера має вигляд

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

або, докладніше,

$$F'_y(x, y, y') - F''_{xy'}(x, y, y') - F''_{yy'}(x, y, y')y' - F''_{y'y'}(x, y, y')y'' = 0.$$

Таким чином, разом з (8.4) ми отримуємо крайову задачу для диференційного рівняння другого порядку. В деяких доволі рідких випадках цю задачу вдається вирішити точно. Так, в задачі про криву найшвидшого спуску виходить, що розв'язанням є дуга циклоїди з точкою повернення в  $A$ , що проходить через  $B$ . Однак набагато частіше точне вирішення знайти не вдається і крайову задачу вирішують наближено тим чи іншим способом.

Однак ще частіше застосовуються *прямі методи*, за допомогою яких наближене розв'язання задачі на екстремум функціоналу зводиться без звернення до рівняння Ейлера до аналогічної задачі зі скінченним числом



степенів свободи. Один з таких методів, запропонований ще Ейлером, полягає в наступному. Розіб'ємо інтервал  $[a, b]$  на  $n$  рівних частин довжини  $h = (b - a)/n$  та позначимо

$$x_i = a + ih, \quad y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Після цього напишемо наближений вираз інтеграла (8.3) за допомогою однієї з квадратурних формул, причому похідні також замінимо наближеними виразами через значення  $y_i$ . Наприклад, застосовуючи квадратурну формулу прямокутників, отримаємо

$$f(y) \approx h \sum_{i=1}^n F\left(x_i - \frac{h}{2}, \frac{y_i + y_{i-1}}{2}, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right);$$

при цьому потрібно врахувати, що значення  $y_0$  і  $y_n$  задані в силу умов (8.4). Таким чином, ми приходимо до задачі на екстремум функції  $n - 1$  аргументів  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , яку можна наближено вирішити одним з методів, згаданих вище. Аналогічно вирішуються задачі на умовний екстремум та екстремум з обмеженням для функціоналу (8.3) і функціоналів більш складної структури.

Інший розповсюджений прямий метод наближеного вирішення варіаційних задач – метод Рітца, який належить до класу неперервних. Так, для задачі (8.3), (8.4) цей метод полягає у тому, що наближене значення будується у вигляді

$$y = \varphi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_n \psi_n. \quad (8.5)$$

Тут функція  $\varphi_0$  задовольняє умови (8.4), «координатні функції»  $\psi_i$  – відповідаючи однорідним умовам  $\psi_i(a) = \psi_i(b) = 0$ , а  $\alpha_i$  – шукані сталі. Підстановка виразу (8.5) в інтеграл (8.3) зводить початкову задачу до задачі на екстремум зі скінченним числом степенів свободи.

Наголосимо, що розв'язання будь якої задачі на оптимізацію найістотнішим чином зв'язане з вибором критерію оптимальності, тобто цільового функціоналу. При зміні критерію розв'язання може змінитися, так що не існує «оптимізації взагалі» без вказування критерію, він повинен бути явно



вказаний або матись на увазі. Неуважність до цього питання, неправильний вибір критерію породжували багаточисленні непорозуміння та помилки.

Відмітимо, що «класичні» математичні методи можна застосовувати, якщо критерій оптимальності в задачі лише один. Тому розповсюджені вирази типу «отримати максимальну вигоду при мінімальних витратах» математично некоректні; потрібно казати «отримати максимальну вигоду при заданих витратах» (тоді критерій – максималізація користі) або «отримати задану користь при мінімальних витратах» (критерій – мінімізація витрат). Багатокритерійні задачі на оптимізацію зазвичай намагаються якимось чином звести до єдиного критерію, однак це далеко не завжди виходить. Що краще – бути багатим, але хворим чи бідним та здоровим? Тоді приходить залучати експертні оцінки та інше.

### 8.3 Про застосування математичного аналізу

Всі основні поняття та співвідношення математичного аналізу в прикладному дослідженні виходять в результаті ідеалізації, спрощення властивостей реального об'єкту, і це необхідно мати на увазі при побудові його математичної моделі. Розглянемо декілька прикладів.

Нехай в електричне коло в момент  $t = t_0$  вмикається постійна напруга  $U = U_0$ . Тоді залежність  $U(t)$  зазвичай приймається такою, як показано на рис. 8.1,а, вона має при  $t = t_0$  стрибок. Однак якщо більш детально прослідкувати за нею, то виявиться, що вона має приблизно такий вигляд, як показано на рис. 8.1,б, тобто не має скачка. Чи потрібно враховувати цю обставину, тобто чи законна ідеалізація  $U(t)$  у вигляді скачка?

Відповідь залежить від того, які властивості вивчаються, та від значень параметрів задачі. В переважній кількості питань характер та час наростання напруги несуттєві,

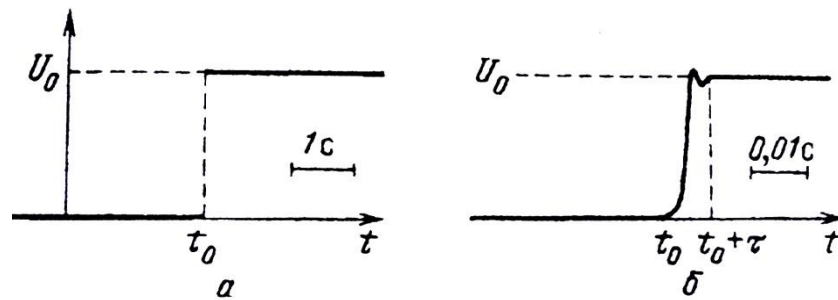


Рис. 8.1 Залежності напруги від часу

важливо лише, що тривалість перехідного процесу мала в порівнянні з характерним часом основного процесу – наприклад, періоду коливань, що виникають в контурі. (Доречі, який сенс виразу «мала порівняно з...»? Зазвичай це означає перехід до наступних порядків величини, тобто зменшення в крайньому випадку в 10 разів.) Тоді можна спростити реальну швидко наростаючу залежність, замінив її ідеалізованою – розривною.

Якщо ж  $\tau$  можна порівняти з  $T$ , то така заміна може виявитись неадекватною і тоді потрібно так або інакше врахувати наростаючий характер  $U(t)$ . Насамкінець, сама ця залежність може виявитись предметом вивчення. Тоді слід прийняти за характерний час і в диференціальних рівняннях, визначаючих  $U(t)$ , перейти до безрозмірного часу  $t_\sigma = t/\tau$ .

В якості другого прикладу розглянемо визначення поняття густини неоднорідного тіла в точці. В математичних курсах вважається, що область  $(\Omega)$  нескінченно мало, тобто в процесі її зміни розміри цієї області стають менше будь-якого заданого додатного значення. Але ясно, що реально область  $(\Omega)$  не може зменшуватися нескінченно, її розміри повинні бути значно більше міжмолекулярних відстаней.

Якщо мова йде про реальне неоднорідне тіло, то в формулі під  $(\Omega)$  треба розуміти не математично, а фізично (також говорять – практично) нескінченно малу область, тобто змінну або навіть постійну область, розміри якої повинні бути не дуже великими, але й не дуже малими. Смысл цієї вимоги залежить від властивостей досліджуваного тіла і від постановки задачі. Так, якщо розглядати густину газу, рідини або аморфного твердого тіла, то ці розміри  $l$  повинні бути

великими в порівнянні з міжмолекулярними розмірами  $\lambda$ , але малі в порівнянні з характерними макророзмірами  $L$ , вздовж яких густина яка нас цікавить може помітно змінитися. (Можна прийняти  $l$  порядку  $\sqrt{\lambda L}$ .) Якщо перед нами дисперсна структура типу ґрунту, то  $l$  повинно бути великим і в порівнянні з мікронеоднорідностями середовища і т.д. Коли говорять про елементи об'єму та маси, відповідно  $d\Omega$  і  $dm = \rho d\Omega$ , то відповідно мають на увазі об'єм та масу фізичної нескінченно малої області.

## 8.4 Матеріали для повторення

### 8.4.1 Лінійні рівняння з змінними коефіцієнтами

1. Більшість задач вирішуються за допомогою методів загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь і методів якісного дослідження лінійних рівнянь другого порядку.

2. Якщо відомо частинний розв'язок  $y_1$  лінійного однорідного рівняння  $n$ -го порядку, то порядок рівняння можна понизит, зберігши лінійність рівняння. Для цього в рівняння треба підставити  $y = y_1 z$  і потім понизити порядок заміною  $z' = u$ .

Щоб знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку  $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ , у якого відомо один частковий розв'язок  $y_1$ , можна понизити порядок рівняння вказаним вище способом.

Однак зручніше скористатися формулою Остроградського-Ліувілля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int \rho(x) dx}, \quad \rho(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

Де  $y_1$  і  $y_2$  - два будь-які розв'язки даного рівняння.

Приклад. Нехай відомо частковий розв'язок  $y_1 = x$  рівняння

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0. \quad (1)$$

По формулі Остроградського-Ліувілля отримаємо

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int (\frac{-2x}{x^2+1})dx}; \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = C(x^2 + 1).$$

Так як функція  $y_1$  відома, то ми отримали нелінійне рівняння першого порядку відносно  $y_2$ . Простіше за все його розв'язати наступним способом. Розділивши обидві частини рівняння на  $y_1^2$ , отримаємо зліва похідну від дробу  $y_2 / y_1$

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{C(x^2 + 1)}{y_1^2}.$$

Так як  $y_1 = x$ , то

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{y_1} &= \int C \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2} dx + C_2 = C(x - \frac{1}{x}) + C_2; \\ y_2 &= C(x^2 - 1) + C_2 x. \end{aligned}$$

Це – загальний розв'язок рівняння (1).

3. Загального методу для знаходження часткового розв'язку лінійного рівняння другого порядку не існує. В деяких випадках розв'язок вдається знайти шляхом підбору.

Приклад. Знайти частковий розв'язок рівняння

$$(1 - 2x^2)y'' + 2y' + 4y = 0,$$

Яке являє собою алгебраїчний многочлен (якщо такий розв'язок існує).

Спочатку знайдемо степінь многочлена. Підставляючи  $y = x^n + \dots$

в рівняння (2) і виписуючи тільки члени з найвищим степенем букви  $x$ , отримаємо:  $-2x^2 \cdot n(n-1)x^{n-2} + \dots + 4x^n + \dots = 0$ . Прирівнюючи коефіцієнти при старшому степені  $x$  до нуля, отримаємо:  $-2n(n-1) + 4 = 0$ ;  $n^2 - 2n - 2 = 0$ .

Звідси  $n_1 = 2$ ; корінь  $n_2 = -1$  не задовольняє умови (степінь многочлена – ціле

додатне число). Отже, многочлен може бути тільки в другій степені. Шукаємо його в вигляді  $y = x^2 + ax + b$ . Підставляючи в рівняння (2), отримаємо  $(4a + 4)x + 2 + 2a + 4b = 0$ , отже,  $(4a + 4) = 0$ ,  $2 + 2a + 4b = 0$ . Звідси  $a = -1$ ,  $b = 0$ . Отже, многочлен  $y = x^2 - x$  являється частковим розв'язком.

4. Можна скористатися наступними твердженнями:

Нехай  $|f(t)| \leq \frac{c}{t^{1+\alpha}}$  при  $t_0 \leq t \leq \infty$ ;  $c, \alpha = \text{const} > 0$ . Тоді

1) рівняння  $u'' + (1 + f(t))u = 0$  має два таких лінійно незалежних рівняння, що при  $t \rightarrow +\infty$

$$u_1(t) = \cos t + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \quad u_2(t) = \sin t + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right);$$

2) рівняння  $u'' - (1 - f(t))u = 0$  має два таких лінійно незалежних рівняння, що при  $t \rightarrow +\infty$

$$u_1(t) = e^t \left(1 + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right), \quad u_2(t) = e^{-t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right).$$

#### 8.4.2 Завдання

I. Дослідити чи являються дані функції нелінійними

1.  $y_1 = x + 2$ ,  $y_2 = x - 2$ .

2.  $y_1 = x^2 - x + 3$ ,  $y_2 = 2x^2 + x$ ,  $y_3 = 2x - 4$

3.  $y_1 = 6x + 9$ ,  $y_2 = 8x + 12$

II. Розв'язати рівняння

4.  $(1 + x^2) \cdot y'' - 2xy' + 2y = 0$ ,  $y_1(x) = x$

$$5. xy'' + y' = 0$$

$$6. (x+1)^3 \cdot y''' - 3(x+1)^2 \cdot y'' + 4(x+1) \cdot y' - 4y = 0$$

$$7. xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y_1(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$8. x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \frac{1}{x}$$

## 9. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

### 9.1 Методи побудови і дослідження рішень

Ми будемо розглядати для певності (визначеності) математичні моделі, які мають вигляд диференціальних рівнянь, звичайних або з частковими похідними, з відповідними початковими та граничними умовами. З необхідними змінами наше обговорення можна поширити і на інші типи моделей.

Метод математичного аналізу можна грубо поділити на якісні, аналітичні і чисельні. За допомогою *якісних методів*, властивості розв'язання вивчаються без його побудови, шляхом аналізу властивостей заданого рівняння. Застосування цих методів вимагає великої математичної підготовки і найменш піддається алгоритмізації.

Приведемо приклад якісного дослідження. Розглянемо нелінійне рівняння:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + g \left( \frac{dx}{dt} \right) + f(x) = 0 \quad (9.1)$$

описує коливання осцилятора з нелінійними законами пружності і тертя. Припустимо, що обидві функції  $f$  і  $g$  неперервні і зростаючі, причому  $f(0) = g(0) = 0$ , і доведемо, що всі розв'язання рівняння (9.1) прямують до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Доведення будемо проводити на наглядному рівні, приймаючи, що якщо будь-яка функція  $\varphi$  при  $t \rightarrow \infty$  прямує до постійної, то  $\varphi'(t) \rightarrow 0$  в цьому процесі. (Практично це завжди так, хоча теоретично можливі винятки, тому є більш складне доведення, не залежне від цього наглядного припущення.) Нехай  $x(t)$  - будь-яке розв'язання рівняння (9.1). Введемо функцію

$$E(t) = \frac{m}{2} [x'(t)]^2 + \int_0^{x(t)} f(\xi) d\xi,$$

яка представляє собою математичний аналог повної енергії осцилятора. Тоді

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \left[ -g \left( \frac{dx}{dt} \right) \right] \leq 0 \quad (9.2)$$

(остання рівність випливає із рівняння (9.1), а нерівність - із властивостей функції  $g$ ). Отже, функція  $E(t)$  спадна (хоча б в слабкому значенні), а так як  $E(t) \geq 0$ , то  $E(t)$  має кінцеву границю при  $t \rightarrow \infty$ . Але тоді по нашому припущенню  $\frac{dE}{dt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Звідси з виразу (9.2) отримуємо, що і  $\frac{dx}{dt} \rightarrow 0$  в цьому процесі. Отже, по нашому припущенню і  $\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Але тоді із рівняння (9.1) отримуємо, що  $f(x) \rightarrow 0$ , а тому і  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , що і потрібно було довести. Як бачимо, в процесі доведення ми не користувалися ні точними, ні наближеними виразами для розв'язання  $x(t)$ .

*Аналітичні методи* спрямовані в основному на побудову точних або асимптотичних формул для рішень і вивчення властивостей розв'язків за допомогою цих формул. Точні формули можуть або охопити сукупність всіх рішень заданого диференціального рівняння (тоді говорять про його *загальне розв'язання*), або представляють окремі, часткові розв'язання, що задовольняють певні властивості: задовольняють заданим початковим або граничним умовам, стаціонарні, періодичні, автомодельні і т.п. Так, як для рівняння вимушених коливань ми шукали часткове розв'язання вигляду - найбільш цікаве розв'язання, яке описує єдине в даних умовах встановленого руху.

Розв'язання, яке побудовано аналітично, може мати вигляд або кінцевої формули, або суми безкінечного ряду, або інтегралу. Така форма розв'язання може виявитися особливо корисна, якщо задача містить параметри і нас цікавить залежність розв'язання від них, або якщо потрібно виявити поведінку розв'язання, коли час або координати прямують до нескінченності (і тому застосування чисельних методів не дуже зручно). В останньому випадку, а також якщо параметри задачі прямують до нуля, або до безкінечності, від точних формул зазвичай переходять до *асимптотичним формулам*, що дає наближене надання розв'язання (говорять також - що дає асимптотичне



розв'язання), справедливе з точністю до членів, малих в порівнянні з виписаними. Проте, асимптотичні формули частіше отримують не з формул для точного розв'язання, а за допомогою дій над початковим рівнянням.

Наведемо простий приклад дослідження точного розв'язання.

Розглянемо вимушені коливання лінійного осцилятора, який для простоти буде записуватися в комплексній формі:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = Ae^{i\omega t}$$

Розв'язання будемо шукати в вигляді:

$$x = Be^{i\omega t}$$

Формула для амплітуди вимушених гармонічних коливань:

$$|B| = \frac{A}{|m(i\omega)^2 + f i\omega + k|} = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + f^2 \omega^2}} \quad (9.3)$$

Нехай параметри  $A$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $f$  фіксовані, а  $\omega$  довільний. При якому значенні  $\omega$  ця амплітуда максимальна, тобто на якій частоті осцилятор збуджується найсильніше? Для відповіді обчислимо похідну

$$\frac{d|B|}{d\omega} = A \left[ (k - m\omega^2)^2 + f^2 \omega^2 \right]^{-3/2} (2km - f^2 - 2m^2 \omega^2) \omega.$$

Ми бачимо, що якщо тертя велике, точніше, якщо  $f \geq \sqrt{2km}$ , то  $\frac{d|B|}{d\omega} < 0$  при всіх  $\omega > 0$  і тому максимум  $|B|$  досягається при  $\omega = 0$ , тобто при статичному впливі. Якщо ж  $f < \sqrt{2km}$ , то при рості  $\omega$ , починаючи з  $\omega = 0$ , значення  $|B|$  спочатку росте, досягаючи максимуму (“квазірезонанс”) при  $\omega = \omega_{кр} := \sqrt{km - f^2/2} / m$ , рівного

$$|B|_{\max} = \frac{2mA}{f\sqrt{4km - f^2}}.$$

Зокрема, при  $f \rightarrow 0$  за допомогою наслідку з формули Тейлора

$$(1 + \alpha)^{\pm 1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}\alpha + \dots (|\alpha| < 1) \quad \text{отримуємо асимптотичні формули} \quad \omega_{кр} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 - \frac{f^2}{4km}\right),$$

$$|B|_{\max} \approx \frac{2mA}{f\sqrt{4km}} = \frac{A}{f} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (f \rightarrow 0) \quad (\approx \text{означає асимптотичну рівність}). \text{ При } w \rightarrow 0 \text{ і}$$

зафіксованих інших параметрів із (9.3) отримуємо асимптотичну формулу

$$|B| = \frac{A}{k} \left( 1 + \frac{f^2 - 2km}{k^2} \omega^2 + \frac{m^2}{k^2} \omega^4 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{A}{k} \left( 1 - \frac{f^2 - 2km}{2k^2} \omega^2 \right) \\ (w \rightarrow 0),$$

а при  $w \rightarrow \infty$  - асимптотичну формулу

$$|B| \approx \frac{A}{mw^2} (w \rightarrow \infty).$$

Ці асимптотичні формули наглядно описують залежність  $|B|$  ( $w$ ) при близьких значеннях параметрів.

З приводу чисельних (наближених) методів вирішення задач математичного аналізу вже говорилося, зокрема, про грубе ділення цих методів на неперервні та дискретні. Зазначимо, що між цими двома типами методів немає різкої межі. Так, неперервні методи часто супроводжуються обчисленнями інтегралів, яке здійснюється за допомогою переходу до вузлових значень функцій, які беруть участь. Природно, що переважна більшість сучасних чисельних методів орієнтована на застосування ЕОМ.

Застосування дискретного чисельного методу вирішення диференціального рівняння по суті означає, що через суто обчислювальні міркування ми замінюємо вихідну неперервну математичну модель на нову, дискретну.

Відзначимо на закінчення, що ми описували тут традиційні математичні методи побудови рішень. Однак при рішенні прикладних математичних задач ці традиційні методи можуть поєднуватися з діями нематематичного характеру – фізичним вимірами, спостереженнями и т.п. Це відноситься не тільки до отримання вихідних параметрів та залежностей, але в деяких випадках і до проміжних етапів дослідження, якщо якісь із величин і функцій, які з'являються порівняно нескладно отримати емпіричні, хоча в принципі їх можна було б знайти і засобами математики.

## 9.2 Асимптотичний розклад

Асимптотичний розклад заданих і шуканих функцій широко поширені при застосуванні аналітичних методів побудови розв'язання. Зазвичай це - розклад по цілим (іноді цілим і напівцілим) позитивним чи негативним ступеням незалежної змінної або параметра, що входить в рівняння. Такий розклад використовується, як для обчислення значень розв'язання, так і для дослідження його поведінки; зокрема, асимптотичні формули, зазвичай отримуються, якщо в асимптотичному розкладі залишити 1 - 2 перших члена.

Будемо тут розглядати розклад розв'язання за ступенями незалежної змінної. При розкладі поблизу кінцевого значення  $t=t_0$  по позитивним ступеням  $t-t_0$  часто застосовується формула Тейлора або метод невизначених коефіцієнтів. Наведемо простий приклад: нехай ми хочемо отримати розклад розв'язання задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t^2, \quad x(0) = 1 \quad (9.4)$$

по ступеням  $t$ . Для цього скористаємось формулою Тейлора

$$x = x_0 + \frac{1}{1!} \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 t + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_0 t^2 + \dots, \quad (9.5)$$

де індекс нуль означає підстановку значення  $t=0$ . З початкової умови і рівняння (9.4) маємо  $x_0 = 1$ ,

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_0 = 1^2 - 0^2 = 1$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (9.4) по  $t$ , отримуємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x \frac{dx}{dt} - 2t, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2x \frac{d^2x}{dt^2} - 2, \quad \frac{d^4x}{dt^4} = 6 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{d^3x}{dt^3}, \dots,$$

звідки, підставляючи значення  $t=0$ , знаходимо послідовно

$$\left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2, \quad \left( \frac{d^3x}{dt^3} \right)_0 = 4, \quad \left( \frac{d^4x}{dt^4} \right)_0 = 20, \dots$$

Підставляючи ці значення в формулу (9.5), приходимо до розкладу

$$x = 1 + t + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^4 + \dots \quad (9.6)$$

При бажанні його неважко продовжити. Їм зручно користуватися при порівняно малих  $|t|$ , наприклад, при  $|t| < 0.1$ . При подальшому збільшенні  $t$  рівняння треба вирішувати чисельно, за допомогою якого-небудь з дискретних методів. При деякому значенні  $t = T > 1$  відбувається загострення рішення - воно обертається в нескінченність. Це виявляється при переповненні комірок пам'яті ЕОМ; щоб знайти значення  $T$ , можна також, зробивши в задачі (9.4) заміну  $x = \frac{1}{y}$ , підрахувати, при якому значенні  $t$  функція  $y(t)$  перейде через значення  $y = 0$ .

Розклад (9.6) можна отримати також методом невизначених коефіцієнтів. Для цього треба підставити вираз

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

в рівняння і початкову умову (9.4) і, розкривши дужки, прирівняти коефіцієнти при однакових ступенях  $t$ .

Асимптотичний розклад при  $t \rightarrow \infty$  зазвичай має вигляд

$$x(t) \sim g(t) \left( a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n} + \dots \right), \quad (9.7)$$

де  $g$  - деяка відома функція, а ряд, що стоїть в дужках, взагалі кажучи, сходиться асимптотично. Останнє означає, що для кожного  $n = 0, 1, 2, \dots$  при всіх досить великих  $t$  має місце нерівність

$$\left| x(t) - g(t) \left( a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n} \right) \right| \leq \frac{\text{const}}{t^{n+1}} |g(t)|$$

(постійна в правій частині залежить від  $n$ ). При цьому не потрібно, щоб ряд був збіжним у звичайному сенсі, а якщо він сходиться, то щоб його сума, помножена на  $g(t)$ , дорівнювала  $x(t)$ ; тому у формулі (9.7) застосований не знак "=", а знак "~" (який в математичному аналізі застосовується і в іншому сенсі). Проте, залишаючи у ряд  $s$  лише кінцеве число перших членів, ми отримуємо асимптотичні формули для  $x(t)$ , тим більш точні при великих  $t$ , чим більше

членів взято. На практиці зазвичай беруть, що похибка, яка отримана із наближеної формули близька до першого з відкинутих членів ряду, хоча теоретично це не завжди так.

Приведемо ще один приклад. Нехай нас цікавить ненульове розв'язання лінійного диференціального рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{t^2}{1+t^2}x = 0, \quad (9.8)$$

обмежене при  $t \rightarrow \infty$ . Записавши розклад при  $t=0$ :

$$\frac{t^2}{1+t^2} = t^2 - t^4 + t^6 - t^8 + \dots,$$

можна за допомогою методу невизначених коефіцієнтів побудувати розклад двох лінійно незалежних розв'язків рівняння (9.8):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{30}t^6 + \frac{13}{672}t^8 - \dots, \\ x_2(t) &= t + \frac{1}{20}t^5 - \frac{1}{42}t^7 + \frac{21}{1440}t^9 - \dots \end{aligned} \quad (9.9)$$

Загальний розв'язок рівняння (9.8) має вигляд:

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t), \quad (9.10)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні постійні. З іншої сторони, з розкладу при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^6} + \dots \quad (9.11)$$

ми бачимо, що при великих  $t$  рівняння (9.8) близьке до рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0,$$

яке має лінійно незалежний розв'язок  $e^t$  і  $e^{-t}$ . Це дає основу для того, щоб шукати асимптотичний розклад розв'язку, обмеженого при  $t \rightarrow \infty$ , у вигляді:

$$x = e^{-t} \left( a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \dots \right).$$

Підстановка цього розкладу в рівняння (9.11) з урахуванням формули (9.11) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $t$  приводить до розкладу шуканого розв'язку:

$$x(t) = a_0 e^{-t} \left( 1 - \frac{1}{2t} + \frac{3}{8t^2} - \frac{13}{48t^3} + \frac{145}{384t^4} - \dots \right). \quad (9.12)$$

Коефіцієнт  $a_0$  залишився довільним, і оскільки розв'язок визначено з точністю до довільного постійного множника, будемо вважати, що  $a_0 = 1$ . Відзначимо, що отриманий ряд сходиться до розв'язання тільки асимптотично, тому більш правильно в (9.12) писати знак  $\sqsubset$ .

Побудованому розв'язку  $x(t)$  відповідають цілком визначені значення  $C_1$  і  $C_2$  в формулі (9.10), тобто цілком визначений асимптотичний розклад при  $t=0$ . Таким чином, виникає задача «склеювання» («зшивання») асимптотичних розкладів при  $t=0$  і  $t=\infty$ . Задача склеювання інколи вирішується точно, проте частіше, як і в цьому випадку, її приходиться розв'язувати за допомогою числового інтегрування. Для цього можна, виходячи з розкладу (9.9) і (9.12) і чисельно інтегруючи рівняння (9.8), продовжувати розв'язок  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  в додатному напрямку, а  $x(t)$  - від'ємному напрямку осі  $t$ , поки вони не попадуть на загальний інтервал осі  $t$ . Після цього знайти коефіцієнти  $C_1, C_2$  не важко.

### 9.3 Інтегральне представлення розв'язків

Опишемо деякі методи інтегрального представлення розв'язків, специфічні для лінійних моделей. Нагадаємо, що лінійну модель можна трактувати як оператор, перетворюючий входи у виходи, для якого справедливий принцип суперпозиції. Методи, що розглядаються, дають можливість, знаючи виходи того чи іншого достатньо повного стандартного набору входів простого вигляду, отримати формулу для виходу при довільному вході. Ці методи широко використовуються для побудови та дослідження розв'язань.

Зупинимося спочатку на методі використання так званих функцій Гріна. Його загальна схема така. Будемо для визначеності вважати, що входами слугують функції  $f(x)$ , задані на фіксованому інтервалі  $a \leq x \leq b$ , а виходами –

функції того ж чи іншого аргументу, також задані на деякому фіксованому інтервалі, чи навіть просто числа. Нехай входом слугує зміщена дельта-функція,  $\delta(x-\xi)$ , де  $a < \xi < b$ ; позначимо відповідний вихід  $G_\xi$  – це і є *функція Гріна* в цій задачі. Тоді, представивши довільний вхід  $f(x)$  як результат накладання нескінченно малих доданків  $[f(\xi)d\xi]\delta(x-\xi)$  і використовуючи принцип суперпозиції, отримуємо відповідний вихід:

$$\int G_\xi f(\xi) d\xi.$$

Розглянемо в якості прикладу повздовжні пружні коливання прямолінійного однорідного стержня, кінці якого  $x=a$  і  $x=b$  шарнірно закріплені. Нехай  $E$  – модуль Юнга,  $I$  – геометричний момент інерції поперечного перетину відносно осі, що проходить через його центр маси паралельно осі  $z$ , а  $q(x)$  являється входом, а  $y(x)$  – виходом, причому обидві функції визначені при  $a \leq x \leq b$ . Відповідна функція Гріна є розв’язком крайової задачі:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= \delta(x-\xi) \quad (a \leq x \leq b), \\ y &= 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (x = a, b), \end{aligned} \quad (9.13)$$

таким чином, це функція двох змінних  $x$  и  $\xi$ , тобто  $G_\xi = G(x; \xi)$ . Говорять також, що це функція двох точок: *точки впливу*  $\xi$  (в якій додається одиничне навантаження) і *точки спостереження*  $x$  (в якій вимірюється прогин). Тому функція Гріна називається також *функцією впливу*: вона описує, як впливає навантаження, прикладене до якої-небудь точки стержня, на його прогин влюбій іншій точці.

Використовуючи властивість дельта-функції, можемо переписати задачу (9.13) в «звичайних» термінах:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= 0 \quad (a \leq x < \xi, \quad \xi < x \leq b), \\
y|_{x=a,b} &= 0, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=a,b} = 0, \\
y|_{x=\xi+} &= y|_{x=\xi-}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi+} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi-}, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\xi+} = \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\xi-} + 1. \\
\left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right]_{x=\xi+} &= \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right]_{x=\xi-} + 1.
\end{aligned}
\tag{9.14}$$

Будемо вважати для простоти, що  $EI = \text{const}$ . Тоді після простого перетворення змінних можна вважати, що всі вони безрозмірні, причому  $EI = 1$ ,  $a = 0$ . Розв'язуючи при таких умовах задачу (9.14) отримаємо:

$$y = \begin{cases} x(\xi - b)(\xi^2 - 2b\xi + x^2) / 6b & (0 \leq x \leq \xi), \\ \xi(x - b)(x^2 - 2bx + \xi^2) / 6b & (\xi \leq x \leq b). \end{cases}
\tag{9.15}$$

Це і є виразом для функції Гріна в даній задачі.

Таким чином, її розв'язок має вигляд:

$$y(x) = \frac{1}{6b} \left[ \int_0^x \xi(x - b)(x^2 - 2bx + \xi^2) q(\xi) d\xi + \int_x^b x(\xi - b)(\xi^2 - 2b\xi + x^2) q(\xi) d\xi \right].$$

Відмітимо важливу властивість функції Гріна, яка відразу слідує з формули (9.15):  $G(x; \xi) \equiv G(\xi; x)$ ; це *закон взаємності*. Насправді, нехай  $0 \leq p \leq q \leq b$ . Тоді при обчисленні  $G(p; q)$  треба користуватися першим рядком формули (9.15), поклавши  $x = p$ ,  $\xi = q$ ; а при обчисленні  $G(q; p)$  потрібно користуватися другим рядком, поклавши  $x = q$ ,  $\xi = p$ , що приведе до того ж результату.

Виявляється, що закон взаємності є наслідком *консервативності* розглянутої системи, тобто наявності у неї потенціальної енергії. Насправді, нехай до деякої точки  $p$  прикладена сила, неперервно зростаюча від 0 до  $P$ . Тоді прогин в цій точці зросте по лінійному закону від 0 до  $PG(p, p)$ , а тому сила здійснює роботу  $\frac{1}{2} P^2 G(p, p)$ . Залишимо цю силу без змін і прикладемо в точці  $q$



ще одну силу, зростаючу від 0 до  $Q$ . Тоді ця сила здійснює роботу  $\frac{1}{2}Q^2G(q, q)$ , а перша – роботу  $PQG(p, q)$ . (Тут використовується припущення про лінійність системи, в силу якого додатковий прогин при прикладенні сили не залежить від уже наявного прогину). В результаті стержень накопить потенціальну енергію:

$$\frac{1}{2}P^2G(p, p) + \frac{1}{2}Q^2G(q, q) + PQG(p, q).$$

Якщо спочатку збільшується друга сила, а потім перша, то потенціальна енергія виходить рівною:

$$\frac{1}{2}Q^2G(q, q) + \frac{1}{2}P^2G(p, p) + QPG(q, p).$$

Але оскільки результуюче положення стержня в обох випадках однакові, то ці два вирази повинні бути рівними. Тому  $G(p; q) = G(q; p)$ .

#### 9.4 Автомодельні розв'язання

Автомодельні («самоподібні») розв'язання відіграють важливу роль при вивченні математичних моделей суцільних середовищ, а побудова та застосування таких рішень лежить в основі ряду аналітичних методів. Розглянемо, як приклад, рівняння теплопровідності для однорідного стержня

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (0 < t < \infty, -\infty < x < \infty) \quad (9.16)$$

і поставимо за мету знайти таке розв'язання, графік якого, зображений при фіксованому  $t = t_0 > 0$ , зі зміною  $t$  розтягується або стискається в певне число разів до кожної з осей  $x, \theta$ . Іншими словами, при зміні  $t$  можна не перебудовувати цей графік, а тільки змінювати одиниці масштабу вздовж зазначених осей. Таке розв'язання і називається автомодельним; воно повинно мати вигляд:

$$\theta_a(x, t) \equiv k_t f\left(\frac{x}{l_t}\right), \quad 0 < t < \infty \quad (9.17)$$

де  $f$  - безрозмірна функція безрозмірного аргументу, а всі розмірності включені в коефіцієнти розтягування  $l_t$  (по осі  $x$ ) і  $k_t$  (по осі  $\theta$ ), що залежать тільки від  $t$ . Так як стержень вважається нескінченним, а втрати тепла через його поверхню рівнянням (9.16) не враховуються, то природно поставити вимогу, щоб загальна кількість тепла в стержні залишалось постійною:

$$c\rho S \int_{-\infty}^{\infty} \theta_a(x, t) dx \equiv \text{const}, \quad 0 < t < \infty, \quad (9.18)$$

де  $c$  - питома теплоємність,  $\rho$  - густина і  $S$  - площа поперечного перерізу стержня. З цієї умови випливає, що коефіцієнти  $l_t$  і  $k_t$  повинні бути обернено пропорційними,  $k_t = \frac{C}{l_t}$ , де  $C = \text{const}$ .

Так як відношення  $\frac{x}{l_t}$  повинно бути безрозмірним, а в силу рівняння (9.17) розмірність величин задовольняють співвідношення:

$$\frac{[\theta]}{[t]} = [a] \frac{[\theta]}{[x]^2}, \quad \text{тобто } [x]^2 = [at],$$

то  $l_t$  з точністю до несуттєвого числового множника (його можна включити в  $f$ ) повинна дорівнювати  $\sqrt{at}$ . Таким чином, в силу (9.17) отримуємо

$$\theta_a(x, t) = \frac{C}{\sqrt{at}} f\left(\frac{x}{\sqrt{at}}\right) = \frac{C}{\sqrt{at}} f(\xi), \quad \xi := \frac{x}{\sqrt{at}}$$

Щоб знайти функцію  $f$ , обчислимо похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_a}{\partial t} &= -\frac{C}{2\sqrt{at^3}} f(\xi) - \frac{C}{\sqrt{at}} f'(\xi) \frac{x}{2\sqrt{at^3}}, \\ \frac{\partial \theta_a}{\partial x} &= \frac{C}{\sqrt{at}} f'(\xi) \frac{1}{\sqrt{at}}, \quad \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial x^2} = \frac{C}{\sqrt{at}} f''(\xi) \frac{1}{at} \end{aligned}$$

і підставимо їх у рівняння (9.16). Після перетворень, отримуємо диференціальне рівняння для функції  $f$ :

$$2f''(\xi) + \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0. \quad (9.19)$$

Таким чином, ми перейшли від рівняння з частковими похідними до звичайного диференціального рівняння.

Чудово, що рівняння (9.19) можна проінтегрувати точно:

$$f(\xi) = C_1 e^{-\frac{1}{4}\xi^2} + C_2 e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \int_0^\xi e^{\frac{1}{4}s^2} ds,$$

де  $C_1, C_2$  - довільні сталі. Обмежуючись першим складовим (друге має більш складний фізичний сенс), отримуємо шукане розв'язання:

$$\theta_a(x, t) = \frac{C}{\sqrt{at}} e^{-x^2/(4at)}. \quad (9.20)$$

Постійну  $C$  підберемо так, щоб загальна кількість тепла в стержні дорівнювала деякому заданому значенню  $Q$ .

Виходячи з відомого інтеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$  і формули (9.18), маємо:

$$Q = c\rho S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{\sqrt{at}} e^{-x^2/(4at)} dx = (x = 2\sqrt{at}r) = c\rho S \cdot \frac{C}{\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} 2\sqrt{at} dr = c\rho S \cdot 2C\sqrt{\pi} \quad (9.21)$$

Знайшовши звідси  $C$  і підставивши в (9.17), отримуємо остаточно:

$$\theta_a(x, t) = \frac{Q}{2c\rho S\sqrt{\pi at}} e^{-x^2/(4at)}. \quad (9.22)$$

Приблизні графіки цього розв'язання при малому, «середньому» та великому  $t$  показані на рис. 9.1 (відповідно лінії 1, 2 і 3). Так як воно при  $|x| \rightarrow \infty$  дуже швидко прямує до нуля, а площа під графіком весь час залишається рівною  $\frac{Q}{(c\rho S)}$ , то

$$\theta_a(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{Q}{c\rho S} \delta(x),$$

де  $\delta$  - дельта-функція. Таким чином, знайдене розв'язання описує еволюцію розподілу температури в стержні, якщо в момент  $t=0$  при  $x=0$  на нескінченно малому інтервалі зосереджено тепло в кількості  $Q$ , а інша частина стержня має нульову температуру.

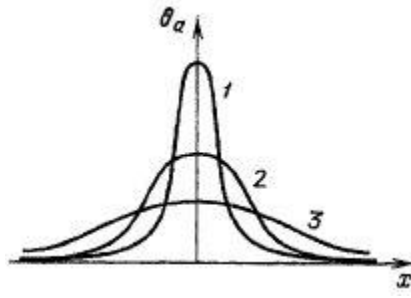


Рис. 9.1 Графік зміни температури

З формули (9.22) випливає ряд наслідків. Так, обчислення (9.21) підтверджують, зроблене вище припущення, про збереження кількості тепла в стержні. З рівності  $l_t = \sqrt{at}$  випливає, що будь-яка кінцева порція тепла «розмивається» зі швидкістю, пропорційною  $(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ , тобто з ростом  $t$ , швидкість падає. Втім, з тієї ж формули (9.22) випливає і парадоксальний висновок про формально нескінченну швидкість поширення тепла.

В якості ще одного наслідку з формули (9.22) отримаємо так звану формулу Пуассона для розв'язання рівняння (9.16) при заданих початкових умовах:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Тут міркування аналогічно тому, як застосовувалася функція Гріна. Початковий розподіл тепла можна розглядати як результат накладання його нескінченно малих порцій  $dQ = (c\rho S d\xi)\theta_0(\xi)$  на інтервалах довжини  $d\xi$ .

В силу однорідності стержня кожної такої порції відповідає закон еволюції температури за формулою:

$$d\theta = \frac{dQ}{2c\rho S\sqrt{\pi at}} e^{-(x-\xi)^2/(4at)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-(x-\xi)^2/(4at)} \theta_0(\xi) d\xi$$

Тепер, користуючись лінійністю рівняння (9.16), застосуємо суперпозицію отриманих нескінченно малих доданків, що дає необхідний результат:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/(4at)} \theta_0(\xi) d\xi$$

$$(-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty).$$

В інших задачах поняття автомодельного розв'язання вводиться схожим чином. І сенс його аналогічний - воно зазвичай описує еволюцію деякої сингулярності, зосередженої в початковий момент в одній точці. Побудова такого розв'язання зводиться до розв'язання звичайного диференціального рівняння; проте далеко не завжди цю побудову вдається здійснити у вигляді точної формули і тоді доводиться вдаватися до чисельного розв'язання. З конкретного виду автомодельного розв'язання можна вивести багато корисних наслідків, навіть часом для нелінійних рівнянь з частковими похідними, які в цілому суттєво складніші, ніж лінійні; проте, на жаль, такими розв'язаннями володіють далеко не всі рівняння з частковими похідними, суттєві для додатків.

## 9.5 Матеріали для повторення

### 9.5.1 Крайові задачі

#### 1. Для пошуку розв'язання крайової задачі

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (1)$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0, \quad (2)$$

треба підставити загальне розв'язання рівняння (1) в крайові умови (2) і з цих умов визначити (якщо це можливо) значення довільних сталих, які входять в формулу загального розв'язання. На відмінну від задачі з початковими умовами (задачі Коші), крайова задача не завжди має розв'язання.

2. Функцією Гріна крайової задачі (1), (2) називається функція  $G(x, s)$ , визначена при  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $x_0 \leq s \leq x_1$ , і при кожному фіксованому  $s$  з відрізка  $[x_0, x_1]$ , що має властивості (як функція від  $x$ ):

1) при  $x \neq s$  вона задовольняє рівняння

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (3)$$

2) при  $x = x_0$  і  $x = x_1$  вона задовольняє заданим крайовим умовам (2);

3) при  $x = s$  вона неперервна по  $x$ , а її похідна по  $x$  має стрибок, рівний  $\frac{1}{a_0(s)}$ , тобто

$$G(s+0, s) = G(s-0, s), \quad G'_x|_{x=s+0} = G'_x|_{x=s-0} + \frac{1}{a_0(s)}. \quad (4)$$

Для того, щоб знайти функцію Гріна крайової задачі (1), (2), потрібно знайти два розв'язання  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  (відмінних від  $y(x) \equiv 0$ ) рівняння (3), задовольняючи відповідно першому і другому із крайових умов (2). Якщо  $y_1(x)$  не задовольняє одразу обом крайовим умовам, то функція Гріна існує і її можна шукати у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} ay_1(x) & (x_0 \leq x \leq s) \\ by_2(x) & (s \leq x \leq x_1) \end{cases} \quad (5)$$

Функція  $a$  і  $b$  залежать від  $s$  і визначається із вимог, щоб функція (5) задовольняла умовам (4), тобто

$$by_2(s) = ay_1(s), \quad by'_2(s) = ay'_1(s) + \frac{1}{a_0(s)}.$$

3. Якщо функція Гріна  $G(x, s)$  існує, то розв'язок крайової задачі (1), (2) виражається формулою:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s) ds$$

4. Власним значенням задачі:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y, \quad (6)$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \quad (7)$$

називається таке число  $\lambda$ , при якому рівняння (6) має розв'язок  $y(x) \not\equiv 0$ , задовольняючі крайові умови (7). Це розв'язання  $y(x)$  називається власною функцією.

## 9.5.2 Завдання

1.  $y'' - y' = 0$ ;  $y(0) = -1$ ,  $y'(1) - y(1) = 2$ .

2.  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ ;  $y(x) = 0(x)$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $y(1) = 3$

Побудувати функцію Гріна для крайових задач:

3.  $y'' = f(x)$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$

4.  $y'' + y = f(x)$ ;  $y(0) = y(\pi)$ ,  $y'(0) = y'(\pi)$

5.  $x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = f(x)$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y(2) + 2y'(2) = 0$

## 10. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

### 10.1 Розв'язок типу біжучої та стоячої хвиль

Пояснимо обидва поняття на прикладі рівняння поздовжніх пружних коливань прямокутного стрижня при лінійному законі пружності

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10.1)$$

Розв'язком типу біжучої хвилі називається розв'язок вигляду

$$u = f(x - ct), \quad (10.2)$$

де  $f$  - будь-яка функція одного аргументу, замість якої підставляється вираз  $x - ct$ ,  $c = \text{const}$ . Неважко зрозуміти суть такого розв'язку. Тому що при фіксованому значенні  $t$  графік функції  $u = f(x - ct)$  отримується з графіка  $u = f(x)$  за допомогою паралельного перенесення в додатному напрямку осі  $x$  на  $ct$  (якщо  $ct < 0$ , то напрямок переносу від'ємний). Нехай тепер  $t$  змінюється неперервно, як це і відбувається насправді. Тоді графік залежності (10.2)  $u$  від  $x$  не змінюючи своєї форми, переміщується як жорсткий шаблон вздовж осі  $x$  причому в момент  $t$  переміщення рівне  $ct$ , точніше  $c$  є швидкість переміщення графіка. Таким чином біжуча хвиля проходить вздовж по стержню, не змінюючи своєї форми з постійною швидкістю  $c$ .

Для того, щоб знайти такий розв'язок, підставимо вираз (10.2) в рівняння (10.1). При цьому необхідно користуватися формулою обчислення похідної складеної функції: наприклад, якщо  $u = f(\xi)$ ,  $\xi = x - ct$ ,  $u'_t = f'(\xi) \cdot \xi'_t = f'(x - ct)(-c)$ , тут  $f'$  - це похідна функції  $f$  по її єдиному аргументу. Аналогічно отримуємо  $u''_{tt} = f''(x - ct)(-c)^2$ ,  $u''_{xx} = f''(x - ct) \cdot 1^2$  та підстановка в (10.1) дає

$$c^2 f''(x - ct) = a^2 f''(x - ct), \quad \text{точніше } (c^2 - a^2) f''(x - ct) = 0.$$

Так як рівність  $f''(\xi) = 0$  приводить до хибного розв'язку  $f(\xi) = A\xi + B$  ( $A, B = \text{const}$ ), то  $c^2 - a^2 = 0$ , точніше  $c_{1,2} = \pm a$ ,



тоді як функція  $f$  залишається будь-якою. Отже, вздовж стержня можуть проходити біжучі хвилі будь-якої форми в обох напрямках зі швидкістю  $a$ . Заодно з'ясували сенс параметра  $a$ , введеного вище. Додавання формально: вияснилося, що це швидкість поширення хвилі вздовж стержня, іншими словами – це швидкість звуку в стержні.

Так як рівняння (10.1) лінійне однорідне, то сума його розв'язків завжди являється розв'язком того ж рівняння. Тому сума

$$u = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (10.3)$$

хвиль, що біжать в додатному та від'ємному напрямках, являються розв'язком рівняння (10.1). Виявляється, що в такому вигляді, підібравши функції  $f_1$  та  $f_2$ , можна представити будь-який розв'язок цього рівняння, точніше формула (10.3) дає загальний розв'язок рівняння (10.1).

Інший вигляд мають біжучі хвилі для телеграфних рівнянь.

$$\frac{\partial V}{\partial x} + L \frac{\partial j}{\partial t} + R j = 0$$

$$\frac{\partial j}{\partial x} + C \frac{\partial V}{\partial t} + G V = 0$$

Диференціюючи 1 рівняння по  $x$  та підставляючи замість  $\frac{\partial j}{\partial x}$  його вираз з другого рівняння, отримуємо телеграфне рівняння

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial V}{\partial t} + RGV$$

при  $\alpha = \frac{[R/L + G/c]}{2}$  похідна  $\frac{\partial u}{\partial t}$  буде мати вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K^2 u, \text{ де } \alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad K = \frac{1}{2} \left[ \frac{R}{L} - \frac{G}{c} \right].$$

Якщо  $\frac{R}{L} = \frac{G}{c}$ , то рівняння перетвориться в хвильове  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

Підстановка  $u = f(\xi)$ ,  $\xi = x - ct$ , приводить до рівняння для  $f$ :

$$(a^2 - c^2)f'' + k^2 f = 0.$$

При  $k > 0$  це рівняння задовольняє вже не будь-яка функція  $f$ . А саме, якщо  $|c| < a$ , то розв'язок має вигляд

$$f(x, t) = f(\xi) = A \cdot \sin\left(\frac{k}{\sqrt{a^2 - c^2}} \xi + \varphi\right) = A \cdot \sin\left[\frac{k}{\sqrt{a^2 - c^2}} (x - ct) + \varphi\right],$$

де  $A$  та  $\varphi$  - довільні сталі. Для  $|c| > a$  розв'язок має вигляд суми двох експонент та необмежено зростає по модулю при  $\xi \rightarrow \infty$  або при  $\xi \rightarrow -\infty$ , що не задовольняє умову задачі. Таким чином, біжуча хвиля має форму синусоїди, причому хвиля, що біжить зі швидкістю  $c$ , має довжину

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \sqrt{a^2 - c^2}.$$

(Фактично хвиля, що біжить вздовж лінії, затухає із-за множника  $e^{-\alpha t}$ ).

Видно, що лінія пропускає лише хвилі, довжина яких знаходиться в інтервалі  $0 < \lambda < 2\pi/k$ , причому хвиля з довжиною  $\lambda$  поширюється з “фазовою швидкістю”

$$c = c_\lambda = \pm \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} \lambda^2},$$

що є меншою, ніж “груповою швидкістю”  $a$  поширення сигналу вздовж лінії. Залежність фазової швидкості від довжини хвилі (або від частоти  $\omega = kc/\sqrt{a^2 - c^2}$ ) призводить до спотворення форми сигналу загального вигляду, отриманого при накладанні гармонічних коливань при його проходженні вздовж лінії. Виключення складають “лінії без спотворення”, для яких  $k = 0$ , точніше  $R/L = G/c$ , а тому  $c$  не залежить від  $\lambda$  та немає спотворень.

Для інших рівнянь з частковими похідними не завжди вдається знайти розв'язок типу біжучої хвилі, а тим більше побудувати за допомогою таких хвиль загальний розв'язок. Тим не менше, якщо вдається знайти такі хвилі, то вони несуть корисну інформацію про характер процесу, який вивчається. Відмітимо, що інколи біжучі хвилі знаходяться в більш загальному вигляді  $u = \varphi(t)f(x - ct)$  чи  $u = \psi(x)f(x - ct)$ ; це означає, що хвиля в процесі свого розвитку змінює амплітуду в залежності від часу чи від геометричної координати.

Розв'язком типу стоячої хвилі називається розв'язок вигляду

$$u = \varphi(t)\psi(x) \tag{10.4}$$

Сенс цього розв'язку також легко пояснити. Якщо відомо графік функції  $\psi(x)$  (моди коливань), то в кожен момент  $t$  графік залежності  $u$  від  $x$  отримуємо з нього розтягненням вздовж осі  $u$ . Коефіцієнт розтягу  $\varphi(t)$  змінюється з часом, але точки, в яких  $\psi(x)=0$  ("вузли"), весь час залишаються на одному й тому ж місці, а в точках екстремуму функції  $\psi$  ("пучності") залежність  $u$  від  $x$  завжди має екстремуми.

Для знаходження стоячих хвиль підставимо вираз (10.4) в (10.1).

Отримаємо

$$\varphi''(t)\psi(x) = a^2\varphi(t)\psi''(x), \quad \text{точніше} \quad \frac{\varphi''(t)}{a^2\varphi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} \quad (10.5)$$

Проте змінні  $t$ ,  $x$  незалежні, тому остання рівність може існувати тільки у випадку якщо обидві часткові похідні рівні сталій. Далі ми побачимо, що вона повинна бути від'ємною, тому позначимо її  $-\lambda$ . Звідси отримуємо два звичайних диференціальних рівняння:

$$\psi''(x) + \lambda\psi(x) = 0, \quad \varphi''(t) + a^2\lambda\varphi(t) = 0;$$

як говорять, ми зробили розділення змінних. Із першого рівняння отримуємо

$$\psi(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x = A_1 \sin(\sqrt{\lambda}x + \alpha),$$

а із другого  $\varphi(t) = A_2 \sin(a\sqrt{\lambda}t + \beta)$ . Позначимо  $A := A_1 A_2$ , отримуємо загальний розв'язок рівняння (10.1) типу стоячої хвилі

$$u = A \sin(\sqrt{\lambda}x + \alpha) \cdot \sin(a\sqrt{\lambda}t + \beta), \quad (10.6)$$

де параметри  $A$ ,  $\lambda$  ( $>0$ ),  $\alpha$ ,  $\beta$  - будь-які.

Якщо часткові похідні в рівності (10.5) додатні, то часовий множник  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  прямує або до нескінченності, або до нуля. Обидва ці варіанти суперечать закону збереження повної енергії розглянутої вільної системи.

За допомогою суперпозиції розв'язків вигляду (10.6) можна побудувати загальний розв'язок рівнянь (10.1). Для цього, якщо стержень кінцевої довжини, застосовуються суми по дискретним значенням  $\lambda$ , аналогічно тому, як було побудовано розв'язок рівняння теплопровідності, а для нескінченного

стержня застосовується інтеграл по  $\lambda$ . І для інших лінійних рівнянь з частковими похідними, коли можна розділити змінні, зазвичай за допомогою стоячих хвиль можна побудувати розв'язок при заданих додаткових умовах в вигляді суми ряду чи інтегралу. Для нелінійних рівнянь спроби побудувати часткові випадки типу стоячої хвилі теж можуть бути корисними.

## 10.2 Фазовий портрет

Якщо математична модель еволюції деякої реальної системи має вигляд автономної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{10.7}$$

(автономність означає, що в праву частину не входить змінна  $t$ ), то для наочного представлення всіх способів еволюції, точніше множини всіх розв'язків, є корисним фазовий простір цієї системи. Спочатку зупинимося на випадку  $n = 2$ , тоді система рівнянь має вигляд

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2),\tag{10.8}$$

будемо вважати функції  $f_1, f_2$  неперервними і такими, що забезпечують однозначність розв'язку задачі Коші для системи (10.8).

Будемо вважати  $x_1, x_2$  як декартові координати на площині, позначимо  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  одиничні вектори по відповідним осям та введемо позначення  $\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$  (це радіус – вектор),

$$f(\vec{r}) (= \vec{f}(x_1, x_2)) = f_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2) \vec{e}_2. \quad \text{Тоді систему (10.8) можна}$$

переписати у векторному вигляді

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = f(\vec{r}). \quad (10.9)$$

Позначивши  $t$  як час, ми бачимо, що  $f(\vec{r})$  є швидкість точки з радіус - вектором  $\vec{r}$ . Таким чином, рівняння (10.9), а також система (10.8) задає на площині  $x_1, x_2$  (фазовій площині) стаціонарне поле швидкостей. Його можна розглядати для наочності як поле швидкостей стаціонарного потоку рідини або краще газу, так як з рідиною зазвичай пов'язують властивість нестисненості, яке тут непотрібне.

При такому трактуванні кожен частковий розв'язок системи (10.8) описує закон руху будь – якої частинки газу. Кожному такому закону відповідає конкретна траєкторія, точніше лінія, яку описує частинка в процесі руху. Навпаки, кожній можливій траєкторії відповідає нескінченне число законів руху, які відрізняються лише в часі (одну й ту ж траєкторію частинка може проходити чи пізніше, чи раніше).

Задача Коші для системи (10.8) зводиться до вирішення закону руху частинки, що проходить в заданий момент часу задану точку простору. В силу пропозицій про єдиний розв'язок цієї задачі, дві різні траєкторії не можуть мати спільних точок, точніше вся фазова площина ніби розшаровується на траєкторії.

Існує три основних види фазових траєкторій: точки спокою, цикли та неперервні траєкторії. Точкою спокою служить точка з координатою  $x_1^0, x_2^0$ , для якої сталі функції  $x_1(t) \equiv x_1^0, x_2(t) \equiv x_2^0$  утворюють розв'язок системи (10.8), точніше для якої

$$f_1(x_1^0, x_2^0) = 0, \quad f_2(x_1^0, x_2^0) = 0.$$

Такий точці відповідає стан рівноваги розглянутої реальної системи. Цикл (говорять також – періодична траєкторія, замкнута траєкторія) відповідає непостійному періодичному розв'язку системи (10.8), він описує періодичний

процес в реальній системі. Неперіодичні траєкторії – всі решта. Вони можуть істотно відрізнитися по своїй асимптотичній поведінці як при  $t \rightarrow \infty$ , так і при  $t \rightarrow -\infty$ : прямує до нескінченності, прямує до точки спокою, до циклу і т. д. Всі ці способи поведінки мають реальне пояснення.

Розглянемо декілька прикладів. Рівнянню вільних коливань маятника без затухання після переходу до безрозмірного часу можна записати

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin \varphi = 0.$$

Для того, щоб перейти до системи рівнянь вигляду (10.8), позначимо  $d\varphi/dt$  буквою  $\psi$ ; тоді отримаємо систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi \quad \frac{d\psi}{dt} = -\sin \varphi. \quad (10.10)$$

Відповідний фазовий портрет (сукупність всіх траєкторій на фазовій площині) показана на рис. 10.1, а. Він періодичний по  $\varphi$  з періодом  $2\pi$ , так що достатньо обмежитися картиною між двома штриховими лініями, вважаючи ці лінії ототожненими, точніше ніби звернувши цю площину в трубку. Іншими словами, фазовим різноманіттям тут служить не площина, а циліндрична поверхня.

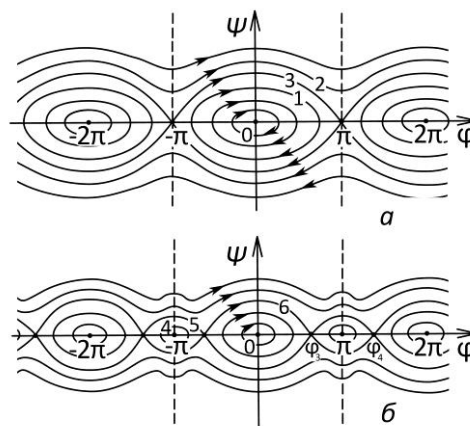


Рис.10.1. Фазовий простір маятника

На цій поверхні система має дві точки спокою:  $(0,0)$ , що відповідає нижньому положенню, та  $(0, \pi)$ , що відповідає верхньому положенню маятника. Траєкторія типу 1 – цикли, які відповідають лібраційним рухам (точніше

погойдуванням) маятника відносно нижнього, стійкого положення рівноваги. Траєкторії типу 2 неперіодичні (якщо їх розглядати на повній площині), їм відповідають ротаційні рухи маятника, точніше його обертання навколо точки підвісу, з необмежено зростаючим фазовим кутом  $\varphi$ . Цікава траєкторія 3: відповідний режим відділяє лібраційний рух від ротаційного і полягає в асимптотичному прагненні маятника до верхнього положення рівноваги при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Такий режим, очевидно, нестійкий.

В якості другого прикладу розглянемо усереднене рівняння вільних коливань маятника без затухання з часто коливаючою точкою підвісу. Після переходу до системи рівнянь першого порядку та введення безрозмірного часу цій системі можна надати вигляд

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = -(1 + k \cos \varphi) \cdot \sin \varphi, \quad (10.11)$$

де  $k = \frac{a^2 \omega^2}{2lg} = \text{const} > 0$ . Поки  $k < 1$ , фазовий портрет цієї системи приблизно такий самий як в (10.10). Але коли  $k$ , зростаючи, переходить через значення  $k = 1$ , минула змінна точка спокою  $(\pi, 0)$ , стає незмінною і від неї відділяються дві змінні точки спокою  $(\varphi_3, 0)$  та  $(\varphi_4, 0)$ , що знову з'явилися. Відповідний фазовий портрет показаний на рис. 10.1, б. Ми бачимо, що з'явилися траєкторії типу 4, яким відповідають лібраційні рухи маятника відносно його верхнього положення. Траєкторія типу 3 зникла, замість неї з'явилися траєкторії, що позначені цифрами 5 та 6, ним відповідає асимптотичний перехід маятнику з одного змінного положення в інше.

Цикл, який слугує границею для незамкнутих траєкторій, називається граничний циклом. В даному прикладі граничний цикл незмінний – в тому сенсі, що траєкторії, які проходять через всі найближчі до нього точки, при  $t \rightarrow \infty$  прямує до цього циклу.

Стійкий граничний цикл описує автоколивання системи, що вивчається. Це періодичний самопідтримуючий процес, який при будь-яких достатньо малих збудженнях знов відновлюється після завершення деякого перехідного етапу. Такий процес можливий лише в нелінійній системі, здатній

до обміну енергією в обох напрямках з зовнішніми об'єктами. Автоколивання досить розповсюджені в природі та техніці, від «шуму моря» в мушлі до флатера крил літака.

### 10.3 Узагальнені розв'язання

Якщо математична модель зведена до задачі про розв'язання деякого рівняння, то ми звичайно, формулюючи це явно або ні, уявляємо собі, в якому класі математичних об'єктів повинно міститись розв'язання, що шукається. Наприклад, якщо шукається число елементів деякої множини (скажімо, число присутніх людей), то розв'язання повинно бути цілим невід'ємним числом; якщо шукається закон зміни точки в ланцюгу, то розв'язання після переходу до безрозмірних величин повинно бути дійсною функцією дійсної змінної і т. п. Вирішивши рівняння, ми перевіряємо, чи дійсно знайдене розв'язання попало в необхідний клас об'єктів; якщо не потрапило, то таке розв'язання найчастіше відкидається як те, що не задовольняє сенсу задачі.

Однак не так вже й рідко буває, що розв'язання, яке не потрапило в раніше встановлений клас, може виявитися корисним і навіть маючим дійсний сенс, хоч іноді і не зовсім той, що спочатку мався на увазі. Такі розв'язання задач звичайно вважають узагальненими і можливість їх появи потрібно мати на увазі, аналізуючи чи дійсно отримані розв'язання є повністю хибними.

Важливий приклад узагальнених рішень складають комплексні розв'язання лінійних автономних диференціальних рівнянь з речовими коефіцієнтами у випадках, коли за постановкою задачі ці розв'язання повинні бути речовими. Застосування комплексних розв'язань в теорії коливань і її різноманітних додатках в механіці, електротехніці і т.д. зараз настільки розповсюджено, що такі розв'язання сприймаються як цілком природні – хоча, звичайно, істинні значення фізичних величин, що коливаються дійсні.



Причини цієї розповсюдженості суто формальні, вони зв'язані з унікальною простотою формули для похідної функції:

$$(e^{pt})'_t = pe^{pt}.$$

Це дає можливість достатньо легко рахувати лінійні диференціальні вирази від такої функції, наприклад, при  $x = Me^{pt}$ ,

$$\left(a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx\right) \Big|_{x=Me^{pt}} = (ap^2 + bp + c) \cdot Me^{pt} = (ap^2 + bp + c)x. \quad (10.12)$$

Аналогічні формули мають місце при інтегруванні експоненти і при рішенні диференціальних рівнянь згадуваного вище типу з експонентою в правій частині. З іншого боку, при обчислюванні лінійного диференціального виразу  $L$  з дійсними коефіцієнтами від комплексної функції, дії над її дійсною і уявною частинами проводяться незалежно один від одного:

$$L[x_1 + ix_2] = L[x_1] + iL[x_2],$$

тобто

$$L[Re\ x] = Re\ L[x], \quad L[Im\ x] = Im\ L[x],$$

де під  $Re$  ( $Im$ ) мається на увазі дійсна (уявна) частини. Наприклад,

$$\left(a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx\right) \Big|_{x=Me^{rt} \cos st} = Re \left\{ \left(a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx\right) \Big|_{x=Me^{(r+is)t}} \right\}$$

(якщо  $a, b, c$  дійсні), а праву частину уже можна рахувати за допомогою формули (10.12). Аналогічні правила справедливі при вирішенні диференціальних рівнянь. Це дає можливість при вирішенні таких рівнянь і їх систем замінювати вихідні гармонічні і затухаючі гармонічні залежності на експоненти з комплексним показником, а отримавши розв'язання задачі, взяти його дійсну частину в якості кінцевої відповіді.

Розглянемо в якості простого прикладу електричне коло, приведене на рис. 10.2, і нехай нас цікавлять струми  $j_1, j_2$ , які встановились в колі після перехідного періоду. Рівняння для струмів зразу слідують із теорії електричних кіл:

$$A \sin \omega t - R_1(j_1 + j_2) = L \frac{dj_1}{dt} + R_2 j_1 = \frac{1}{C} \int j_2 dt,$$

причому постійна в інтегралі обирається так, щоб він мав нульове середнє значення. Згідно сказаному вище замінімо задану функцію  $A \sin \omega t$  на  $Ae^{i\omega t}$ ,

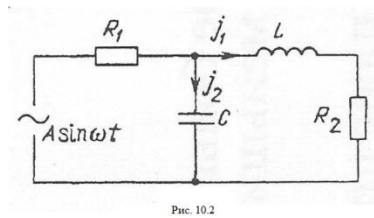


Рис.10.2. Електричне коло

для якої перша являється уявною частиною; тоді рівняння для відповідних комплексних струмів приймуть вигляд

$$A e^{i\omega t} - R_1 (J_1 + J_2) = L \frac{dJ_1}{dt} + R_2 J_1 = \frac{1}{C} \int J_2 dt. \quad (10.13)$$

Будемо шукати встановлені струми у вигляді  $J_1 = I_1 e^{i\omega t}$ ,  $J_2 = I_2 e^{i\omega t}$ . Підстановка цих виразів у (10.13) після скорочення на  $e^{i\omega t}$  приводить до рівнянь

$$A - R_1 (I_1 + I_2) = Li\omega I_1 + R_2 I_1 = \frac{1}{C} \frac{1}{i\omega} I_2.$$

Звідси легко знайти

$$I_1 = \frac{A}{R_1(1 - LC\omega^2) + R_2 + (L + R_1 R_2 C)\omega i},$$

$$I_2 = \frac{AiC\omega(R_2 + L\omega i)}{R_1(1 - LC\omega^2) + R_2 + (L + R_1 R_2 C)\omega i}$$

і шукані струми

$$j_1 = \text{Im} (I_1 e^{i\omega t}), \quad j_2 = \text{Im} (I_2 e^{i\omega t}) \quad (10.14)$$

За допомогою формули Ейлера для  $e$  не важко виразити  $j_1, j_2$  в «повністю дійсній» формі через  $\cos \omega t$  та  $\sin \omega t$  але в ряді відношень формули (10.14) зручніше: наприклад, ми відразу отримуємо, що амплітуда струму  $j_1$  дорівнює

$$|I_1| = \frac{A}{\sqrt{[R_1(1 - LC\omega^2) + R_2]^2 + (L + R_1 R_2 C)^2 \omega^2}}$$

Тому відповідь зазвичай залишають в формі (10.14) або в формі комплексного узагальненого розв'язання.

Ще один тип узагальнених рішень виникає через відсутність у побудованого розв'язання тих похідних, які припускались при виведенні рівняння, - як кажуть через недостатність гладкості розв'язання.

#### 10.4 Вибір степені точності розв'язання

Система рівнянь, яка складає математичну модель реального об'єкту, зазвичай допускає різні методи рішення, в результаті застосування яких саме розв'язання виходить з більшою чи меншою точністю. Велика точність, як правило, потребує більшої, іноді значно більшої витрати часу, тому вибір методу розв'язання складає відповідальний етап використання математики.

Розглянемо схему побудови розв'язання: реальний об'єкт – математична модель-розв'язання. Математична модель має більшу чи меншу адекватність реальному об'єкту по вивченим властивостям. В свою чергу розв'язання має певну точність по відношенню до моделі. Правильність опису розв'язання, властивостей які вивчаються визначається обома цими обставинами.

Нам потрібно, щоб розв'язання математичної задачі правильно описувала властивості реального об'єкту. Для цього потрібно підвищувати як адекватність математичної моделі так і точність розв'язання математичної задачі. Якщо математична модель груба, має низьку адекватність або якщо точність вихідних даних незадовільна, то ніяке підвищення точності розв'язання залучених складних математичних методів обчислювальних засобів не зможуть зробити остаточний результат достатньо надійним. Про це необхідно пам'ятати так як методи, які згадувались і засоби можуть скласти шкідливу ілюзію правдивості, високої точності остаточного результату і вводять в оману як самого виконавця так і інших людей: важко змиритися з тим, що значні зусилля та мистецтво, які

бути застосовані при рішенні математичної задачі могли виявитися практично безплідними. Тому в подібних ситуаціях центральну роль повинні грати не так значніші уточнення обчислювального методу (який звичайно не повинен бути дуже грубим), скільки аналіз і удосконалення математичної моделі.

Ілюзія достовірності відповіді може також видаватись через зайві значущі цифри в рішенні. Вклад в цю ілюзію вносять ЕВМ, які зазвичай видають розв'язання з передбаченим для них числом значущих цифр незалежно від грубості методу в застосовуваному обчислювальному методі і тим більше неадекватності математичної моделі. Наприклад, якщо ми захочемо вчислити довжину земної орбіти при русі навколо сонця по грубій формулі  $L = 2\pi R$ , введемо замість  $R$  грубе значення  $0,149 \cdot 10^9$  км, то ЕВМ видасть значення  $L = 0,936194611 \cdot 10^9$  км. Начебто відповідь відома з точністю до 1 км, що звичайно не так: насправді вже третя цифра після коми сумнівна. Тому так важливий контроль точності розв'язання.

Підсумовуючи вищесказане як в вихідних даних, так і в відповідях дуже бажано вказувати їх точність, якщо це можливо. Це можна робити в явній формі, наприклад,  $3,171 \pm 0,013$ ;  $0,26^{+0,02}_{-0,01}$  і т. д.

### 10.5 З'ясування точності розв'язання

Припустимо, що ми вибрали систему рівнянь, які складають математичну модель об'єкту, що вивчається і побудували наближене розв'язання цієї системи. Якщо залишити питання про адекватність моделі в стороні, то поговоримо про те як з'ясувати точність отриманої відповіді як розв'язання математичної задачі.

Взагалі причини, що породжують помилку при застосуванні математичної моделі і проведенні розрахунків можна грубо поділити на:

- 1) помилки, що породжені неадекватністю цієї моделі;

- 2) помилки в вихідних числових даних;
- 3) помилки обчислювального методу;
- 4) помилки округлені процесів розрахунків. Як було сказано зараз ми відволічємось від першої причини.

Щоб оцінити вплив помилок в вихідних числових даних на розв'язання можна у відповідності з відомостями про ці помилки по одному чи іншому правилу довільно «похитать» вихідні дані і подивитись як це відобразиться на рішенні. Наведемо простий приклад: нехай потрібно порахувати значення

$$q = \frac{cb^2 - a^3b}{ad^3 + e},$$

де  $a = 1.37$ ,  $b = 20.6$ ,  $c = 3.32$ ,  $d = 0.27$ ,  $e = 2.15$  і можлива похибка досягає одиниці в останній цифрі. Для подібних простих прикладів є свої спеціальні правила визначення похибки, але ми не будемо тут ними користуватись, а покажемо метод «хитання». Безпосереднє визначення на мікрокалькуляторі дає значення  $q = 622.84184$ , але зразу ясно, що більшість цифр тут сумнівні. Замінивши навмання (це можна робити за-допомогою датчика випадкових чисел) вихідні дані  $a = 1.38$ ,  $b = 20.5$ ,  $c = 3.31$ ,  $d = 0.28$ ,  $e = 2.16$ , отримуємо  $q = 610.48981$ . Інші спроби хитання вихідних даних приводять до зміни  $q$  того ж порядку. Значить, відповідь треба дати у вигляді:  $q = 6,2 \cdot 10^2$ .

У зв'язку зі сказаним згадаємо про корисне поняття чутливості  $S(x, y)$  функції  $y(x)$  при даному значенні аргументу: це коефіцієнт пропорційності між малими відносними змінами  $\frac{dx}{x}$  аргументу і  $\frac{dy}{y}$  функції, тобто  $\frac{dy}{y} = S(y, x) \frac{dx}{x}$ , звідки

$$S(y, x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}.$$

Аналогічно визначається чутливість функції декількох змінних по кожній з них. Особливо просто виражається чутливість для степеневих функцій: так, якщо  $z = \frac{x^3}{y^2}$ , то  $S(z, x) = 3$ ,  $S(z, y) = -2$ .

Для оцінки можливого впливу помилок обчислювального методу найбільш переконливим являється порівняння відповіді з результатом розв'язання тієї ж задачі за-допомогою іншого, незалежного методу. Так, розв'язання граничної задачі, отримане методом сіток, можна перевірити, побудувавши її розв'язання по методу Гальоркіна або по методу кінцевих елементів. Можлива також перевірка розв'язання в рамках одного методу. Наприклад, результат, отриманий методом сіток, можна перевірити, зменшивши крок сітки; результат застосування методу Гальоркіна можна перевірити, змінивши базис, і т.д.

(Загалом, для деяких простих задач, наприклад задачі Коші для звичайного диференційного рівняння, дотримання заданої точності може виконуватись автоматично за-допомогою стандартної програми на ЕВМ).

Помилки округлення при вирішенні диференціальних рівнянь дискретними методами можуть створити парадоксальну ситуацію; бажаючи підвищити точність результату, ми зменшуємо кроки, але якщо застосовуваний метод вибрали невлучно (не стійкий в розрахунковому відношенні), то через збільшення числа дій помилок округлення починають позначатися сильніше і кінцева похибка збільшується. Не рідко така нестійкість виявляється сама, породжуючи швидко зростаючі осциляції розв'язання та навіть переповнення, абсолютно не співпадаючи з реальною суттю задачі. В менш гострих ситуаціях вплив помилок округлення можна вияснити за допомогою повторного розрахунку з подвійною точністю, або з одною відсутньою цифрою, або із зміненним кроком інтегрування і т.д.

## 10.6 Особливості процесу розв'язання змістовних задач

При розв'язанні рівнянь, які складають математичну модель, математичними величинами весь час приховуються їх фізичні прототипи. Це

надає можливість в процесі розв'язання в необхідних випадках опиратись на інтуїцію, застосовувати наочні та фізичні міркування. Проте дуже вільні відхилення від строгих математичних міркувань можуть привести до істотних помилок; тому логічні пробіли та інші слабкі місця в міркуваннях повинні ясно усвідомлюватися. В той же час інтуїцію, що дозволяє обрати правильний метод розв'язання та уникнути помилок при наявності таких слабких місць, потрібно всіляко розвивати.

Одною з характерних рис прикладних математичних досліджень є широке застосування понять, не повністю чітко виявлених з позиції строгої математики; такі значення прийнято називати розмитими. Так, ми можемо сказати, що той чи інший обчислюваний метод в певних умовах хороший чи поганий, що деякий ряд чи ітераційний процес сходиться швидко чи повільно, що похибка приблизного розв'язання велика чи мала і т.п., не даючи цим термінам (по суті, поняттям) строгого визначення – що не заважає їм нести корисну інформацію.

Важливим розмитим поняттям, широко застосованим при розв'язанні змістовних задач, є поняття практичної збіжності безкінечного процесу, що означає можливість отримання відповіді за прийняте число кроків з прийнятою точністю та імовірністю. Наприклад, річ іде про нескінченний ряд. В курсі математики, вивчаючи збіжність ряду, ми зазвичай рахуємо, що всі його члени задані явною формулою або задовольняють явно виписану нерівність. На відміну від цього в додатках математики (наприклад, при використанні методу малого параметра) зазвичай члени ряду просто обчислюють один за іншим). Ясно, що при такому образі дій строго довести збіжність ряду неможливо. Але цього не роблять; замість цього порівнюють один з одним послідовні часткові суми ряду і якщо виявляється чітка тенденція до збіжності (до речі, це поняття також є розмитим) та немає підстав чекати, що подальші члени порушать тенденцію, то обчислювати припиняють, приймаючи часткову суму за повну суму ряду.

Важливий частковий випадок розмитих понять складають розмиті величини. Вони зберігають деякі ознаки математичних величин, але не володіють чіткістю поставлених. Нехай, наприклад, ми прагнемо того, щоб похибка наближеного розв'язання була малою. Але що означає вираз «мала похибка»? Це залежить від типу розглянутих задач, від традицій, можливих наслідків помилки та інших явно чи неявно не дуже чітко сформульованих умов, при чому критерії малості, що виникли самі є розмитими. Припустимо, що малою будемо рахувати похибку в 1%, а вона вийшла рівною 1,5%. Тоді в більшості випадків похибку все рівно назвуть малою, а з приводу похибки 3% може виникнути дискусія неминуча при застосуванні розмитих понять на не чіткій границі їх дії.

## 10.7 Про застосування ЕОМ

ЕОМ перетворилися зараз в повсякденне знаряддя прикладної математики. Вони не тільки підвищили на багато порядків швидкість та точність обчислень для відомих раніше класів задач, але і вперше зробили можливим розв'язання величезного числа інших задач. Однак ЕОМ зажадали істотної зміни багатьох обчислювальних методів і навіть всієї «обчислювальної ідеології».

Значну роль набув обчислювальний експеримент. У ряді випадків замість спроби аналітичного дослідження властивостей розв'язків виявилось більш доцільним з'ясувати ці властивості та побудувати розв'язання на ЕОМ. Це відноситься, зокрема, до рішень диференціальних рівнянь, включаючи властивості, пов'язані з асимптотичною поведінкою розв'язків, наприклад із з'ясуванням стійкості. Різновидом обчислювального експерименту є так зване імітаційне моделювання, що вживається для аналізу поведінки складних



економічних і т. п. завдань, для яких математичну модель у вигляді системи рівнянь навіть виписати складно.

Як приклад такої перебудови вкажемо на обчислення сум числових рядів. Раніше для цього широко застосовувалися різноманітні штучні перетворення, деякі з них і зараз не втратили актуальності, проте при застосуванні ЕОМ нерідко більш ефективним виявляється безпосереднє обчислення членів ряду. Але при цьому, як і в інших подібних випадках, досить відповідальним етапом є підготовка задачі до програмування, тобто вибір алгоритму, найбільш ефективного для розв'язання конкретного завдання. Пояснимо сказане на простому прикладі. Нехай ми хочемо обчислити суму нескінченного ряду

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots,$$

причому, сподіваючись на потужність ЕОМ, вирішили не застосовувати ніяких хитрощів, а просто підраховувати та додавати члени ряду, поки вони не обернуться в машинний нуль. Однак нескладний підрахунок, який ми надаємо читачеві, показує, що для ЕОМ середньої потужності на це піде близько 10 год; при цьому підсумкова помилка, навіть без урахування заокруглень, вийде на десять порядків вище останніх доданків. Описана схема обчислень вкрай нераціональна. Результат вийде набагато швидше та точніше, якщо, наприклад, підрахувати 104 перших члени ряду (це займе час порядку 0,1 с), а залишок замінити за наближеною формулою

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \approx \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{ds}{s^2} = \frac{2}{2n+1},$$

точність якої має порядок  $0,1 \cdot n^{-3}$ . Таким чином, розумна підготовка задачі до програмування дозволила тут зменшити час роботи більш ніж на п'ять порядків! (Звичайно, в даному прикладі можна було скористатися і довідниками, згідно з якими  $S = 2\pi^2/6$ , але це рідкісний випадок, коли сума ряду явно виражається через відомі константи.)

### 10.8.1 Лінійні системи з постійними коефіцієнтами

Приклад. Розв'язати систему  $\dot{x} = y + 1$ ,  $\dot{y} = 2e^t - x$ . Виключаємо  $y$ . З першого рівняння маємо  $y = \dot{x} - 1$ . Підставляючи в друге рівняння, отримуємо  $\ddot{x} = 2e^t - x$ . Вирішивши це рівняння другого порядку (методами § 11), знайдемо  $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t$ . Значить,  $y = \dot{x} - 1 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t - 1$

[illegible]
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

170

Якщо для кратного кореня  $\lambda$  є стільки лінійно незалежних власних векторів  $v^1, \dots, v^k$ , як і його кратність, то йому відповідає розв'язання

$$C_1 v^1 e^{\lambda t} + \dots + C_k v^k e^{\lambda t}.$$

Якщо для кореня  $\lambda$  кратності  $k$  є тільки  $m$  лінійно незалежних власних векторів, і  $m < k$ , то розв'язання, відповідне цьому  $\lambda$ , можна знайти у вигляді добутку багаточлена ступеня  $k - m$  на  $e^{\lambda t}$ , тобто у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = (a + bt + \dots + dt^{k-m})e^{\lambda t}, \\ \dots \\ x_n = (p + qt + \dots + st^{k-m})e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (3)$$

Щоб знайти коефіцієнти  $a, b, \dots, s$ , треба підставити розв'язання (3) в систему (1). Прирівнявши коефіцієнти подібних членів в лівій та правій частинах рівнянь, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо  $a, b, \dots, s$ . Потрібно знайти спільне розв'язання цієї системи. Коефіцієнти  $a, b, \dots, s$  повинні залежати від  $k$  довільних постійних, де  $k$  - кратність кореня  $\lambda$ .

Знайшовши для кожного  $\lambda$  вирішення зазначеного виду та склавши їх, отримаємо спільне розв'язання системи (1).

Приклад. вирішити систему

$$\dot{x} = 2x + y + z, \quad \dot{y} = -2x - z, \quad \dot{z} = 2x + y + 2z. \quad (4)$$

Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Для простого кореня  $\lambda_1 = 2$  знаходимо власний вектор  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , вирішуючи систему

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0, \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0. \end{cases} \quad (6)$$

(коефіцієнти цієї системи дорівнюють елементам детермінанта (5) при  $\lambda_1 = 2$ ). З (6) знаходимо  $2\alpha = -\beta = \gamma$ . Тобто, вектор  $(1, -2, 2)$  - власний, і

$$x = e^{2t}, \quad y = -2e^{2t}, \quad z = 2e^{2t} \quad (7)$$

- частковий розв'язок системи (4).

Для кратного кореня  $\lambda = 1$  спочатку визначимо число лінійно незалежних власних векторів. При  $\lambda = 1$  з (5) отримуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Її порядок  $n = 3$ , ранг  $r = 2$ . Число лінійно незалежних власних векторів дорівнює  $m = n - r = 1$ . Корінь  $\lambda = 1$  має кратність  $k = 2$ . Так як  $k > m$ , то розв'язання слід шукати у вигляді добутку багаточлена ступеня  $k - m = 1$  на  $e^{\lambda t}$ , тобто у вигляді

$$x = (a + bt)e^t, \quad y = (c + dt)e^t, \quad z = (f + gt)e^t. \quad (8)$$

Щоб знайти коефіцієнти  $a, b, \dots$ , підставляємо (8) у систему (4) і прирівнюємо коефіцієнти при подібних членах. Отримуємо систему

$$\begin{aligned} b+d+g &= 0, & b &= a+c+f, \\ -2b-d-g &= 0, & d &= -2a-c-f, \\ 2b+d+g &= 0, & g &= 2a+c+f. \end{aligned} \quad (9)$$

Знайдемо спільне розв'язання цієї системи. З двох лівих рівнянь маємо

$b = 0, g = -d$ . Підставляючи це в інші рівняння, отримуємо

$$0 = a+c+f, \quad d = -2a-c-f \quad (10)$$

(інші рівняння будуть наслідками написаних). Розв'язуємо систему (10), наприклад, відносно  $a$  і  $f$ :

$$a = -d, \quad f = d - c.$$

Таким чином, всі невідомі виражені через  $c$  і  $d$ . Поклавши  $c = C_1, d = C_2$ , маємо  $a = -C_2, b = 0, f = C_2 - C_1, g = -C_2$ . Загальне розв'язання системи (9) знайдено.

Підставивши знайдені значення  $a, b, \dots$  в (8) та додавши часткові розв'язання (7), помножені на  $C_3$ , отримаємо спільне розв'язання системи (4):

$$x = C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \quad y = (C_1 + C_2 t) e^t - 2C_3 e^{2t}, \quad z = (C_2 - C_1 - C_2 t) e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

3. Інший спосіб вирішення системи (1). Для будь-якої матриці існує базис, в якому матриця має жорданову форму. Кожній клітці порядку  $p \geq 1$

жорданової форми відповідає серія  $h_1, h_2, \dots, h_p$  векторів базису, що задовольняють рівнянням

$$Ah_1 = \lambda h_1, \quad h_1 \neq 0,$$

$$Ah_2 = \lambda h_2 + h_1,$$

$$Ah_3 = \lambda h_3 + h_2,$$

.....

$$Ah_p = \lambda h_p + h_{p-1}.$$

Вектор  $h_1$  називається власним, а  $h_2, h_3, \dots, h_p$  - приєднаними. Кожній серії  $h_1, h_2, \dots, h_p$  відповідає  $p$  лінійно незалежних рішень  $x^1, x^2, \dots, x^p$  системи  $\dot{x} = Ax$  (верхній індекс вказує номер розв'язання):

$$x^1 = e^{\lambda t} h_1,$$

$$x^2 = e^{\lambda t} \left( \frac{t}{1!} h_1 + h_2 \right),$$

$$x^3 = e^{\lambda t} \left( \frac{t^2}{1!} h_1 + \frac{t}{1!} h_2 + h_3 \right),$$

.....

$$x^p = e^{\lambda t} \left( \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} h_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} h_2 + \dots + \frac{t}{1!} h_{p-1} + h_p \right).$$

Загальне число всіх таких розв'язань дорівнює сумі порядків всіх елементів жорданової форми, тобто порядком матриці. Вони складають фундаментальну систему рішень системи  $\dot{x} = Ax$ .

Правило для запам'ятовування формул (12). Власному вектору  $h_1$ , відповідає розв'язок  $x^1 = e^{\lambda t} h_1$  - Якщо скрізь відкинути  $e^{\lambda t}$ , то кожний рядок правої частини (12) вийде інтегруванням по  $t$  попереднього рядка, причому сталу інтегрування треба взяти рівною наступному по порядку вектора серії.

4. У разі, коли є комплексні корені  $\lambda$ , викладені способи дають вираз розв'язання через комплексні функції. Якщо при цьому коефіцієнти системи (1) дійсні, то можна виконати розв'язання тільки через дійсні функції. Для цього потрібно скористатися тим, що дійсна і уявна частини комплексного розв'язання, відповідного кореню  $\lambda = \alpha + \beta i$  ( $\beta \neq 0$ ), є лінійно незалежними розв'язаннями.

Приклад. Розв'язати систему  $\dot{x} = 4x - y$ ,  $\dot{y} = 5x + 2y$ .

Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для кореня  $\lambda = 3 + 2i$  знаходимо власний вектор  $(a, b)$ :

$$\begin{cases} (1-2i)a - b = 0, \\ 5a - (1+2i)b = 0. \end{cases}$$

Можна взяти  $a = 1$ ,  $b = 1 - 2i$ . Маємо частковий розв'язок  $x = e^{(3+2i)t}$ ,  $y = (1 - 2i)e^{(3+2i)t}$ .

Так як дана система з дійсними коефіцієнтами, то розв'язок, відповідний кореню

$\lambda = 3 - 2i$ , можна не шукати, він буде комплексно спряжений зі знайденим розв'язком. Щоб отримати два дійсних розв'язки, потрібно взяти дійсну або умовну частини знайденого комплексного розв'язку. Так як  $e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$ , то

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \cos 2t, \\ y_1 = \operatorname{Re}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + 2 \sin 2t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \sin 2t, \\ y_2 = \operatorname{Im}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\sin 2t - 2 \cos 2t). \end{cases}$$

Загальний розв'язок виражається через два знайдені лінійно незалежних розв'язки:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3t}(\cos 2t + 2 \sin 2t) + C_2 e^{3t}(\sin 2t - 2 \cos 2t).$$

## 5. Щоб розв'язати систему

$$\begin{cases} a_{10}x^{(m)} + a_{11}x^{(m-1)} + \dots + a_{1m}x + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \dots + b_{1n}y = 0, \\ a_{20}x^{(p)} + a_{21}x^{(p-1)} + \dots + a_{2p}x + b_{20}y^{(q)} + b_{21}y^{(q-1)} + \dots + b_{2q}y = 0, \end{cases}$$

не приведену до нормального виду, потрібно скласти характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^m + a_{11}\lambda^{m-1} + \dots + a_{1m} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \dots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^p + a_{21}\lambda^{p-1} + \dots + a_{2p} & b_{20}\lambda^q + b_{21}\lambda^{q-1} + \dots + b_{2q} \end{vmatrix} = 0$$

та знайти його корені. Після цього розв'язок знаходиться тим же способом, як і в п.2.

Аналогічно розв'язуються системи трьох та більше рівнянь.

6. Частковий розв'язок лінійної неоднорідної системи з постійними коефіцієнтами

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad i=1, \dots, n \quad (13)$$

можна шукати методом невизначених коефіцієнтів в тому випадку, коли функції  $f_i(t)$  складаються з сум та добутків функцій  $b_0 + b_1t + \dots + b_mt^m$ ,  $e^{\alpha t}$ ,  $\cos \beta t$ ,  $\sin \beta t$ . Це робиться по тим же ж правилам, що для одного лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами, див. п.2, з наступними змінами. Якщо  $f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$ , де  $P_{m_i}(t)$  - многочлен степені  $m_i$ , то частковий розв'язок системи (13) представлений не у вигляді  $t^s Q_m(t)e^{\gamma t}$ , а в вигляді

$$x_i = Q_{m+s}^i(t)e^{\gamma t}, \quad i=1, \dots, n, \quad (14)$$

де  $Q_{m+s}^i(t)$  - многочлени степені  $m+s$  з невідомими коефіцієнтами,  $m = \max m_i$ ,  $s=0$ , якщо

$\gamma$  - не корінь, то  $s$  можна взяти рівним кратності цього кореня (або, точніше,  $s$  на 1 більше найбільшого з степенів многочленів, на які множиться  $e^{\gamma t}$  в загальному розв'язку однорідної системи). Невідомі коефіцієнти многочленів визначаються шляхом підстановки виразів (14) в дану систему (13) і порівняння коефіцієнтів подібних членів.

Аналогічно визначаються степені многочленів в випадку, коли  $f_i(t)$  містять  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  та  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ , а число  $\gamma = \alpha + \beta i \in$  коренем характеристичного рівняння.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t), \\ \dot{y} = x + 2y + te^{3t} \cos t. \end{cases}$$

Спочатку для однорідної системи  $\dot{x} = 4x - y$ ,  $\dot{y} = x + 2y$  знаходимо корені  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$  і як в п. 2 знаходимо загальний розв'язок

$$x_0 = (C_1 t + C_2) e^{3t}, \quad y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1) e^{3t}.$$

В системі (15) для функцій  $te^{3t}, e^{3t} \sin t, te^{3t} \cos t$  числа  $\alpha + \beta i$  відповідно рівні 3,  $3+i$ ,  $3+i$ .

Тому потрібно окремо знайти часткові розв'язки систем

$$\dot{x} = 4x - y + te^{3t}, \quad \dot{y} = x + 2y, \quad (16)$$

$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t} \sin t, \quad \dot{y} = x + 2y + te^{3t} \cos t. \quad (17)$$

Для системи (16)  $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2, s = 2, m = 1$ . Відповідно до (14), частковий розв'язок можна шукати у вигляді

$$x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{3t}, \quad y_1 = (ft^3 + gt^2 + ht + j)e^{3t}.$$

Для системи (17)  $\alpha + \beta i = 3 + i \neq \lambda_{1,2}, s = 0, m = 1$ . Частковий розв'язок має вигляд

$$x_2 = (kt + l)e^{3t} \sin t + (mt + n)e^{3t} \cos t,$$

$$y_2 = (pt + q)e^{3t} \sin t + (rt + s)e^{3t} \cos t.$$

Знайшовши розв'язки коефіцієнтів  $a, b, \dots$ , загальний розв'язок системи (15) запишемо у вигляді

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

## 7. Розв'язок неоднорідної системи

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + \dots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n$$

можна знайти методом варіації змінних, якщо відомо загальний розв'язок однорідної системи з тими ж коефіцієнтами  $a_{ik}(t)$ . Для цього в формулі загального розв'язку однорідної системи потрібно замінити випадкові змінні  $C_i$  на невідомі функції  $C_i(t)$ .

Отримані вирази для  $x_i$  потрібно підставити в дану неоднорідну систему і з цієї системи знайти  $C_i(t)$ .

## 8. Показниковою функцією $e^A$ матриці $A$ називається сума ряду

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (19)$$

де  $E$  – одинична матриця. Ряд сходиться для будь-якої матриці  $A$ .

Властивості  $e^A$ :



а) якщо  $A = CMC^{-1}$ , то  $e^A = Ce^M C^{-1}$ ;

б) якщо  $AB = BA$ , то  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ ;

в) матриця  $X(t) = e^{tA}$  задовольняє рівняння  $\frac{dX}{dt} = AX$ ;  $X(0) = E$ .

Методи знаходження  $e^A$ :

1) Шляхом розв'язку системи диференціальних рівнянь. В силу властивості в)  $i$ -й стовпець матриці  $e^{tA}$  є розв'язком системи рівнянь (в векторній формі)  $\dot{x} = Ax$  з початковими умовами  $x_i(0) = 1$ ,  $x_k(0) = 0$ , при  $k \neq i$  ( $x_i$  -  $i$ -та координата вектора  $x$ ).

2) Шляхом приведення матриці до жорданової форми. Нехай відома така матриця  $C$ , що матриця  $C^{-1}AC = M$  має жорданову форму (складається з елементів  $K_i$ ). Кожна жорданова клітинка має вигляд  $K = \lambda E + F$ , у матриці  $F$  всі елементи нулі, крім 1-го ряду над діагоналлю. Тому  $F^m = 0$ , де  $m$  - порядок матриці  $F$ , і  $e^F$  легко знайти за допомогою ряду (18). Так як ще  $e^{\lambda E} = e^\lambda E$ , то

$$e^K = e^{\lambda E + F} = e^{\lambda E} \cdot e^F = e^\lambda E \cdot e^F = e^\lambda e^F.$$

Склавши з клітинок  $e^{K_i}$  матрицю  $e^M$ , знайдемо  $e^A$  за допомогою властивості а).

## 10.8.2 Завдання

Застосувавши метод виключення розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь

1.  $\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 4y.$

2.  $\dot{x} + y = t^2 + 6t + 1, \quad \dot{y} - x = -3t^2 + 3t + 1.$

3.  $\dot{x} = -x + y + z, \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = x + y - z.$

4.  $\dot{x} = y - z, \quad \dot{y} = x + y, \quad \dot{z} = x + z.$

Застосувавши метод Ейлера, розв'язати наступні системи рівнянь

5.  $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = y - 4x.$

6.  $\dot{x} = x - y + z, \quad \dot{y} = x + y - z, \quad \dot{z} = 2x - y.$

7.  $\dot{x} = -2x + y - 2z, \quad \dot{y} = x - 2y + 2z, \quad \dot{z} = 3x - 3y + 5z.$

## 11. МОДЕЛІ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ З ЧАСТКОВИМИ ПОХІДНИМИ

### 11.1 Потік частинок в трубці

В циліндричній трубці з поперечним перерізом  $S$  рухаються частинки речовини (пилинки, електрони). Швидкість їхнього руху  $u(t) > 0$  вздовж вісі  $x$  змінюється з часом. Наприклад, заряджені частинки можуть прискорюватись або уповільнюватись під дією електричного поля (рис.11.1). Для побудови найпростішої моделі розглянутого руху введемо наступні припущення:

а) частинки між собою не взаємодіють (не зіштовхуються, не притягуються і т.п.). Для цього, очевидно, щільність частинок повинна бути достатньо малою (в цьому випадку заряджені частинки не лише не зіштовхуються, але й не мають один на одного будь-якого впливу через великі відстані між ними);

б) початкова швидкість всіх частинок, які знаходяться в одному і тому ж поперечному перерізі з координатою  $x$ , однакова й направлена вздовж вісі  $x$ .

в) початкова щільність частинок також залежить лише від координати  $x$ .

г) зовнішні сили, які діють на частинку, направлені вздовж вісі  $x$ .

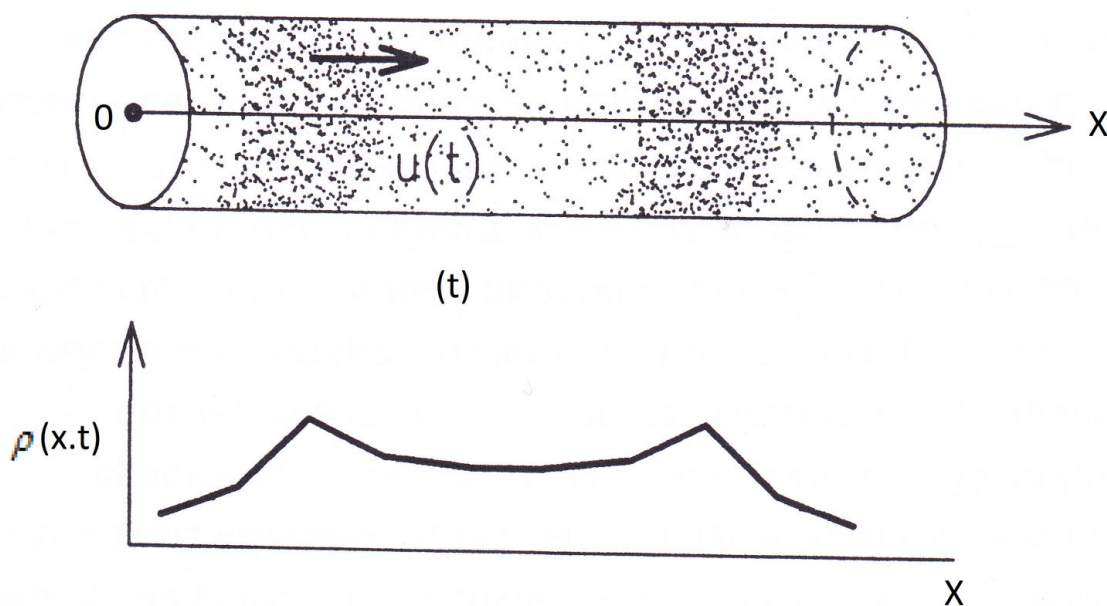


Рис. 11.1 Рух частинок речовини в трубці

Припущення а) означає, що швидкість частинок може змінюватись лише під дією зовнішніх сил, припущення б)-г) забезпечують одномірність процесу перенесення, тобто залежність шуканої щільності потоку частинок лише від координати  $x$  та часу  $t \geq 0$ .

Таким чином, за заданою початковою щільність  $\rho(x, t=0) = \rho_0(x)$  необхідно знайти щільність частинок  $\rho(x, t)$  в будь-який момент часу для будь-яких  $x$  (швидкість руху  $u(t)$  задана). Звернемось до закону збереження маси, підрахувавши баланс речовини в малому елементі трубки від  $x$  до  $x+dx$  за час  $dt$  (рис.11.2).

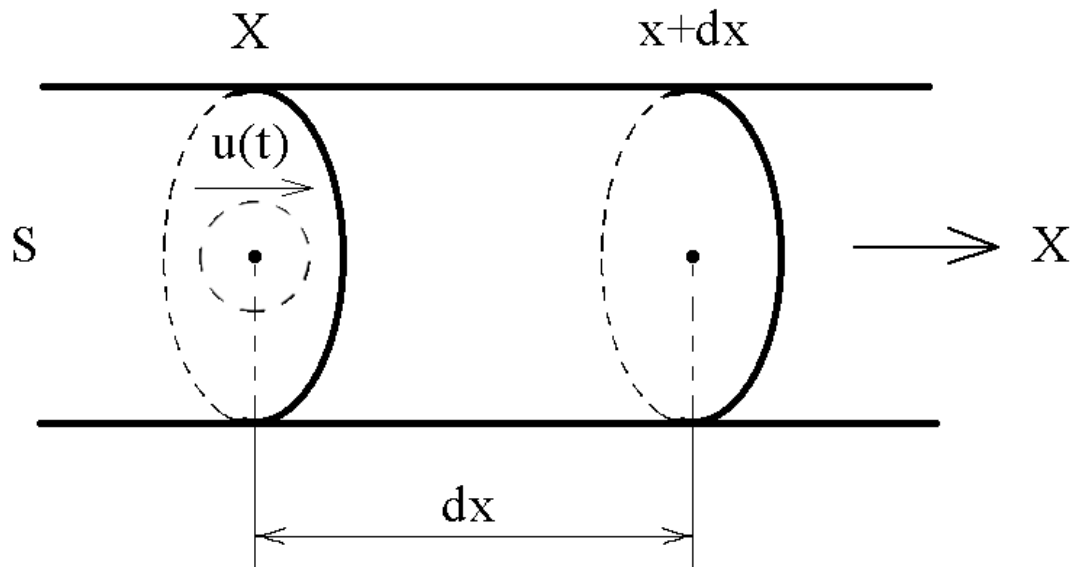


Рис.11.2 Баланс речовин в малому об'ємі трубки

Зліва в елементарний об'єм входить кількість речовини з масою, яка дорівнює:

$$Su(t)dt \rho(x, t + \xi dt), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

де  $Su(t)dt$  - об'єм речовини, яка ввійшла за проміжок часу  $dt$ .

Через правий переріз елемента за цей же час виходить маса:

$$-Su(t)dt \rho(x + dx, t + \xi dt), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

тобто сумарна зміна маси:

$$dm = Su(t) \{ \rho(x, t + \xi dt) - \rho(x + dx, t + \xi dt) \} dt.$$

В силу малості проміжку  $dt$  швидкість  $u(t)$  вважається постійною. Величини  $\rho(x, t + \xi dt)$  та  $\rho(x + dx, t + \xi dt)$  – середні за часом значення щільності в перерізах  $x$  та  $x+dx$ .

Інший спосіб підрахунку зміни в фіксованому об'ємі  $Sdx$  очевидний із сенсу величини  $\rho(x, t)$ :

$$dm = Sdx(\rho(x + \eta dx, t + dt) - \rho(x + \eta' dx, t)), \quad 0 < \eta, \eta' < 1,$$

де  $\rho(x + \eta dx, t + dt)$  та  $\rho(x + \eta' dx, t)$  – середнє по простору значення щільності в моменти  $t$  та  $t+dt$ .

Прирівнявши обидва отриманих для  $dm$  вирази та спрямувавши  $dx$  і  $dt$  до нуля, приходимо до рівняння для  $\rho(x, t)$ , якт відповідає закону збереження мас,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u(t) = 0, \dots -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (11.1)$$

з початковою умовою

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (11.2)$$

Величина  $\rho u$  (*потік речовини, або потік маси*) рівний кількості речовини, яка проходить за одиницю часу через одиничну поверхню поперечного перерізу трубки. Як видно з (11.1) швидкість зміни щільності речовини з часом в будь-якому перерізі визначається «швидкістю» зміни потоку речовини за координатою  $x$ .

Схожою властивістю володіють багато інших моделей, які відповідають законам збереження та описують зовсім інші процеси.

1. У випадку постійної швидкості  $u(t)=u_0$  приходимо до найпростішого лінійного рівняння в часткових похідних:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \dots -\infty < x < \infty, \dots > 0. \quad (11.3)$$

Його загальний розв'язок нескладно знайти, прийнявши до уваги, що рівняння (11.3) має характеристики – лінії  $x=u_0 t+C$ , на яких значення шуканої функції постійні в часі, тобто

$$\rho(x = u_0 t + C, t) = \rho_c,$$

або, в еквівалентному записі:

$$\rho(x, t) = \rho(x + u_0(t - t_0), t_0), \quad (t - t_0) \geq 0.$$

Обираючи  $t_0=0$ , отримаємо:

$$\rho(x, t) = \rho(\xi) = \rho(x + u_0 t). \quad (11.4)$$

Інтеграл (11.4) є загальним розв'язком рівняння (11.3). З формули (11.4) та початкових даних (11.2) легко знайти шукану функцію, при чому вона залежить не окремо від змінних  $x$ ,  $t$ , а від їх комбінації  $\xi = x + u_0 t$  (біжуча хвиля). Просторовий профіль щільності без спотворень переноситься вздовж потоку (рис.11.3) з постійною швидкістю (рівняння (11.3) також називають *рівнянням переносу*). Це основна властивість розв'язку рівняння (11.3) дещо модифікується у випадку, коли швидкість частинки залежить від часу – профіль густини переноситься за рівні проміжки часу (рис.11.2) на різні відстані. Якщо ж за деяких причин швидкість потоку залежить від густини ( $u = u(\rho)$ ), то рівняння (11.1) стає нелінійним, і поведінка його розв'язку може мати якісно інший характер.

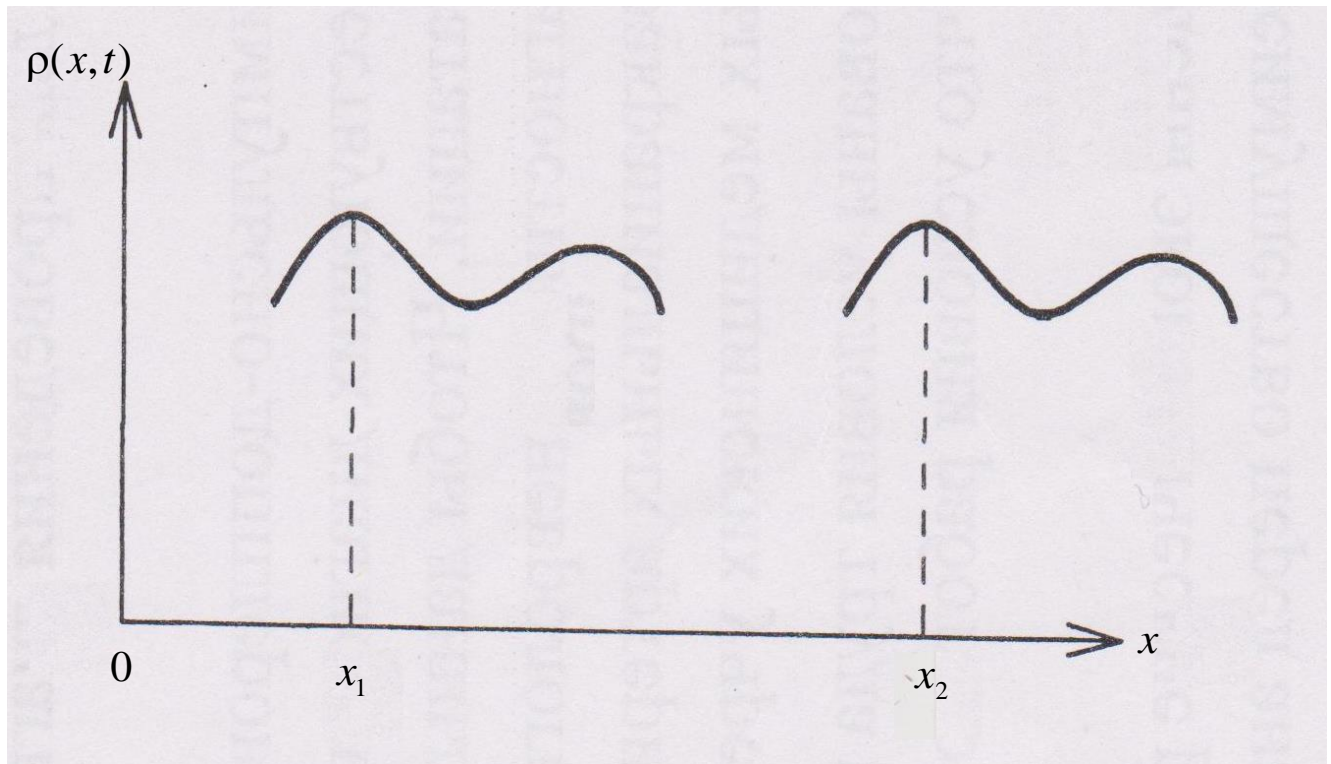


Рис.11.3 Профіль щільності вздовж потоку

## 11.2 Гравітаційний режим потоку ґрунтових вод

Пористе середовище представляє собою пласт водонепроникного матеріалу (пісок, глина), який оточений знизу ґрунтом, що не пропускає воду (граніт), а зверху – поверхнею землі (рис.11.4).

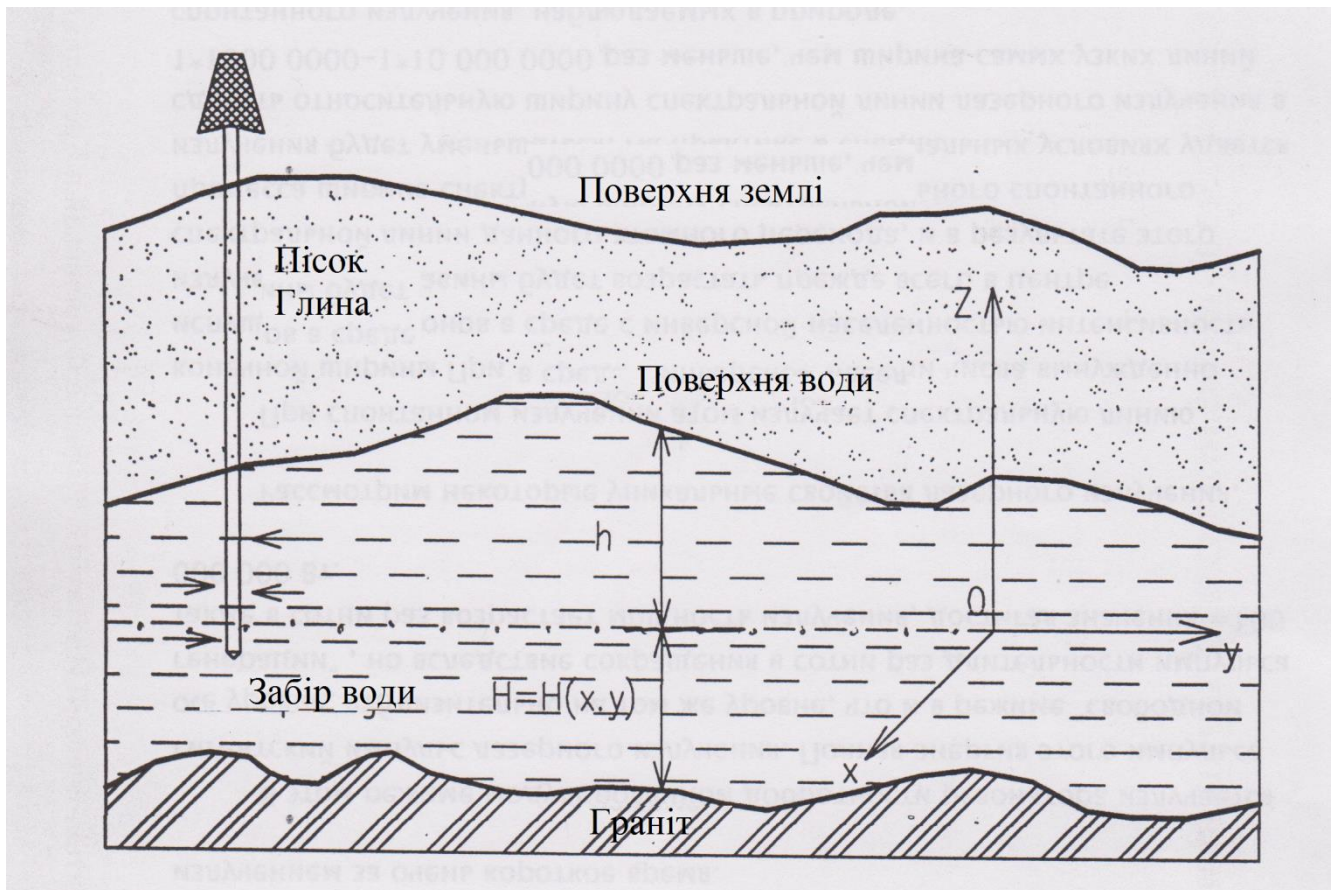


Рис.11.4 Схема розміщення ґрунтових вод

Якщо через інтенсивну роботу артезіанських свердловин та в результаті рясних опадів рівень води в якому-небудь місці шару змінюється, то під дією сили тяжіння починається рух рідини, що вирівнює її вільну поверхню.

Для описання цього процесу введемо, перш за все, ряд припущень:

- 1) вода розглядається як нестислива рідина з постійною густиною  $\rho$ ;
- 2) товщина пласту набагато менша його ширини та довжини;

- 3) підстильна поверхня не має розривів та зламів, відома функція  $H(x,y)$ , що її задає, - достатньо гладка функція своїх аргументів;
- 4) вільна поверхня води  $h=h(x, y, t)$  плавно змінюється зі зміною координат  $x, y$ ;
- 5) ґрунтові води ніде не виходять на поверхню землі, причому на вільній поверхні рідини тиск постійний;
- 6) ґрунт однорідний, тобто його фізико-механічні не залежать від аргументів  $x, y, z$ .

Перше припущення цілком природне, оскільки в розглянутому процесі не можуть досягатися тиски, здатні помітно змінювати густину води. Решта припущень використовуються для спрощення. Наприклад, друге припущення (тонкий пласт) означає, що рух рідини двомірний і всі його характеристики не залежать від координати  $z$ , останні два припущення дозволяють побудувати модель, однакову для всіх точок ґрунту. Разом з тим припущення 1) – 6) аж ніяк не вихолощують суть процесу, так як вони виконуються в значній кількості реальних ситуацій (рис. 11.3).

### 11.3 Баланс маси в елементі ґрунту

Виділимо в пласті елементарний об'єм, що утворився в результаті перетину вертикальної призми  $ABCD$  підстильною та вільною поверхнями ґрунту.

Оскільки розміри призми  $dx$  і  $dy$  малі, а функції  $H$  і  $h$  гладкі (припущення 3), 4)), то отримане тіло з високим ступенем точності можна вважати паралелепіпедом. Введемо невідомі функції  $v=v(x, y, t)$  і  $u=u(x, y, t)$  – складові швидкості рідини вздовж осей  $x, y$  (рис. 11.5).

Розрахуємо кількості рідини, що входить в паралелепіпед і виходить з нього за проміжок часу  $dt$ .



Через грань DC в елемент ґрунту входить маса води, що дорівнює об'єму пройденої через неї рідини, помноженому на густину  $\rho$ , тобто величина  $\rho u(H+h)dydt$ , а через грань AB виходить маса води  $\rho u(H+h)dydt + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\rho u(H+h)] dx \right\} dydt$ .

У цьому виразі порівняно с попереднім додається член, що описує приріст функції  $\rho u(H+h)$  під час переходу від площини  $x$  до площини  $x+dx$ . Під величиною  $\rho \cdot u(H+h)$ , як і в п. 11.1, розуміють потік маси (речовини).

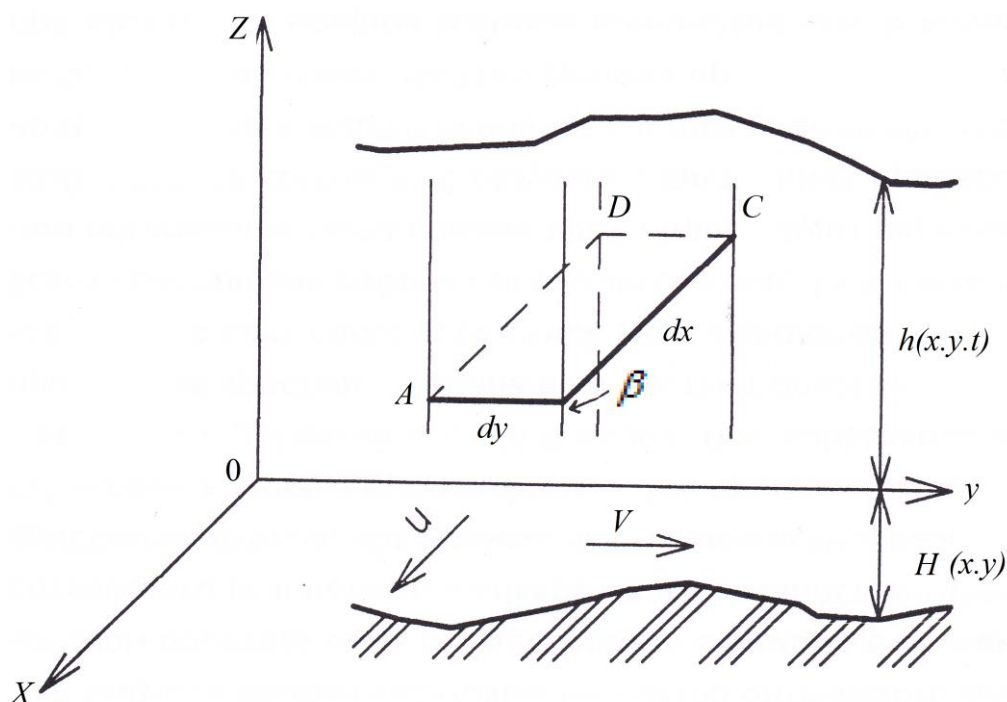


Рисунок 11.5 Розрахунок кількості рідини

Відтак, під час руху рідини вздовж осі  $x$  в елементі ґрунту накопичується маса

$$-\frac{\partial}{\partial x} [\rho \cdot u(H+h)] dx dy dt.$$

Здійснюючи аналогічні міркування для граней AD до BC, отримуємо зміну маси води за рахунок її руху вздовж осі  $y$ :

$$-\frac{\partial}{\partial y} [\rho \cdot v(H+h)] dx dy dt.$$

Оскільки вздовж осі  $z$  в елемент ґрунту рідина не втікає та не витікає з нього (знизу – підстильний пласт, а через вільну поверхню немає потоку речовини), то сумарна зміна маси води в елементі ґрунту рівна:

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\rho \cdot u(H+h)] + \frac{\partial}{\partial y}[\rho \cdot v(H+h)]\right\} dx dy dt \quad (5)$$

Загальна кількість рідини в паралелепіпеді дорівнює його об'єму, помноженому на густину  $\rho$  та коефіцієнт пористості  $m < 1$  (так як частина об'єму зайнята ґрунтом):

$$\rho \cdot m(H+h) dx dy.$$

Зміна маси води в елементі за час  $dt$ , вочевидь, дорівнює

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\rho \cdot m(H+h)] dx dy\right\} dt$$

Враховуючи, що  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \dots, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , з останнього виразу отримуємо

$$m \cdot \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} dx dy dt, \quad (6)$$

й, прирівнюючи (5) до (6), приходимо до рівняння нерозривності, що виражає закон збереження маси в розглянутому процесі:

$$m\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\rho \cdot u(H+h)] - \frac{\partial}{\partial y}[\rho \cdot v(H+h)]. \quad (7)$$

У рівнянні (7) швидкість зміни досліджуваної величини (у даному випадку маси) з часом визначається дивергенцією потоку цієї величини – властивість, характерна для багатьох моделей, отриманих із законів збереження.

З врахуванням того, що  $\frac{\partial \rho}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial \rho}{\partial y} \equiv 0$ , рівняння (7) записується в простішій формі:

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)] - \frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]. \quad (8)$$

## 11.4 Замикання закону збереження маси

Рівняння (8) містить три невідомих величини –  $h, u, v$ . Отже, для замикання моделі необхідно залучити якісь додаткові міркування про характер процесу. Їх дає напівемпіричний закон Дарсі:

$$u = -\mu \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad v = -\mu \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (9)$$

де  $\rho(x, y, z, t)$  – тиск в рідині,  $\mu > 0$  – коефіцієнт, що визначається властивостями ґрунту. Відповідно до закону Дарсі, компоненти швидкості потоку рідини пропорційні відповідним компонентам градієнту тиску. Помітимо, що за своїм фізичним змістом градієнт тиску – це сила (віднесена до одиниці об'єму). Тим часом, за другим законом Ньютона діюча на тіло сила пропорційна його прискоренню, а не швидкості, як в законі Дарсі. Однак дане протиріччя виникає через те, що під час потоку через ґрунт (фільтрації) рідина долає опір його частинок, на відміну від вільного плину.

У формулах (9) використовується нова невідома величина  $\rho$  – тиск рідини. Її зв'язок зі вже знайденими величинами знайти неважко, зробивши припущення про повільний і майже горизонтальний рух води. Тоді можна знехтувати динамічною складовою та розрахувати його за гідростатичним законом як тиск, створений стовпом рідини:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho \cdot g \{h(x, y, t) - z\} + const,$$

де  $const$  – тиск на поверхні рідини (наприклад, атмосферний),  $g$  – прискорення вільного падіння.

Підставляючи останню формулу в (9), отримаємо:

$$u = -\mu \rho g \frac{\partial h}{\partial x}, \dots \dots \dots v = -\mu \rho g \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (10)$$

Використовуючи (10) в рівнянні нерозривності (8), остаточно приходимо до рівняння руху ґрунтових вод

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} [(H(x, y) + h) \frac{\partial h}{\partial x}] + k \frac{\partial}{\partial y} [(H(x, y) + h) \frac{\partial h}{\partial y}], \quad k = \frac{\mu \rho g}{m} \quad (11)$$

чи до рівняння Бусінеска, що містить лише одну невідому функцію  $h(x, y, t)$ .

### 11.5 Про деякі властивості рівняння Бусінеска

Рівняння (11) нестационарне (шукана функція  $h$  залежить від  $t$ ), двовимірне ( $h$  залежить від  $x$  та  $y$ ), що належить до параболічного типу. Воно неоднорідне, тому що функція  $H$  залежить від  $x$  та  $y$ , й нелінійне, оскільки в його правій частині присутні члени виду  $(hh_x)_x$  і  $(hh_y)_y$ . Порівняно з рівнянням (1) рівняння Бусінеска – більш складний математичний об'єкт. У силу нелінійності його загальний розв'язок не може бути знайдений аналітично, проте нескладно отримати деякі цілком змістовні часткові розв'язки, котрі слугують також тестами під час розробки числових методів для рівняння (11).

Для побудови завершеної моделі руху ґрунтових вод необхідно знати вхідні дані для рівняння (11): форму підстильної поверхні  $H(x, y)$ , коефіцієнт  $k$  та крайові умови, що задають функцію  $h$  в початковий момент часу та на границях пласту (ймовірно, в деяких виділених областях пласту, наприклад, на артезіанській свердловині). Тут відмітимо тільки, що найпростішим варіантом формулювання крайових умов для рівняння (11) є постановка лише початкової умови – функції  $h(x, y, t)$  в момент  $t=0$ :

$$h(x, y, t=0) = h_0(x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

Така постановка відповідає задачі Коші для рівняння (11), що розв'язується також в області  $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$ . У задачі Коші за допомогою відомого розподілу рівня ґрунтових вод  $h_0$  шукають функцію  $h$  для всіх  $t > 0$ .

Розгляд пласту нескінченних розмірів, звичайно, ідеалізація. Проте, якщо вивчається течія в невеликій центральній області пласту протягом відносно

незначного проміжку часу, то впливом границь пласта можна знехтувати, й розв'язання задачі Коші описує цілком реальний процес.

Відмітимо також, що деякі крайові умови були фактично неявно введені в модель під час виведення рівняння Бусінеска.

Припущення про непроникність пласту було використане під час отримання рівняння балансу, а без припущення 5) про «щілину» між поверхнею землі й поверхнею ґрунтових вод (тобто, коли вся рідина знаходиться в пористому середовищі) не можна було б використовувати закон Дарсі у всій розглянутій області. Певна річ, виконання цих та інших припущень повинно контролюватись під час вивчення даного об'єкту на основі побудованої моделі. У результаті введення додаткових припущень загальна модель спрощується. Так, якщо через якісь причини розв'язок не залежить від часу  $t$  – стаціонарний процес), то приходимо до еліптичного рівняння,

$$\frac{\partial}{\partial x}[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y}[(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}] = 0 \quad (12)$$

для розв'язання якого не потрібно задавати функцію  $h$  в початковий момент. У найпростішому випадку (12) перетворюється в рівняння Лапласа. Якщо підстильна поверхня горизонтальна ( $H(x,y)=H_0=\text{const}$ ), то рівняння Бусінеска стає однорідним:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}(h \frac{\partial h}{\partial x}) + k \frac{\partial}{\partial y}(h \frac{\partial h}{\partial y}).$$

Під час додаткового припущення про одновимірність течії, коли шуканий розв'язок залежить лише від одної просторової змінної, наприклад, координати  $x$ , приходимо до рівняння

$$\frac{\partial h}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x}(h \frac{\partial h}{\partial x}), \quad (13)$$

що називається також одновимірним рівнянням типу нелінійної теплопровідності або одновимірним рівнянням ізотермічної фільтрації. Одновимірними є, наприклад, течії в пластах, сильно витягнутих по одному з напрямків так, що зміною величин уздовж поперечного перерізу пласта можна

знехтувати (якщо через обмежуючі його в поперечних напрямках поверхні рідина не протікає).

Нарешті, найпростіша модель течії ґрунтових вод задається *рівнянням теплопровідності* (або *рівнянням дифузії речовини*)

$$\frac{dh}{dt} = kH_0 \frac{d^2h}{dx^2} \quad (14)$$

яке отримується за умови  $h \ll H_0$ , тобто для малих змін рівня рідини в порівнянні з товщиною пласта.

Останні три рівняння відносяться до параболічного типу, причому рівняння (14) лінійне та існують добре відомі методи отримання його загального розв'язання. Зрозуміло, крім перерахованих можливі й інші спрощення вихідної моделі, наприклад двовимірне рівняння (13).

З рівняння Буссінеска відносно неважко отримати і більш складні моделі, коли невірні деякі зі сформульованих у п. 11.2 припущень. Зокрема, у багатьох випадках ґрунт неоднорідний, тобто  $m = m(x, y)$ ,  $\mu = \mu(x, y)$ , і необхідно враховувати надходження рідини в пласт у результаті опадів. Тоді узагальнене рівняння Буссінеска має вигляд

$$\frac{m(x, y)}{pg} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu(x, y)(H + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(x, y)(H + h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + q(x, y, t) \quad (15)$$

де  $q(x, y, t)$  характеризує потужність опадів у точці  $x, y$  в момент часу  $t$ .

Отже, застосування фундаментального закону збереження маси дозволило отримати різноманітні моделі розглянутих процесів. Різниця між моделями визначається типом отриманих рівнянь (гіперболічний, параболічний, еліптичний), їх просторово-часовими характеристиками (стаціонарне, нестаціонарне, одномірне, багатовимірне), наявністю або

відсутністю нелінійностей, а також постановкою крайових умов. Таким чином, в залежності від конкретних властивостей об'єкта та додаткових припущень, ґрунтуючись на одному і тому ж фундаментальному законі, можна отримати абсолютно різні математичні моделі.

З іншого боку, як буде не раз показано надалі, одні й ті ж математичні моделі можуть, в силу своєї універсальності, відповідати об'єктам абсолютно різної природи.

### Закон Дарсі

$$\begin{aligned} u &= -\mu \frac{\partial P}{\partial x}; \\ V &= -\mu \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9)$$

$P(x, y, z, t)$  – тиск в рідині,  $\mu > 0$  – коефіцієнт визначається властивостями ґрунту. Рідина рухається повільно и майже горизонтально.

$P(x, y, z, t) = \rho \cdot g [h(x, y, t) - z] + const$  – гідростатичний тиск стовпа рідини,

$const$  - тиск на поверхні рідини (наприклад, атмосферний) підставимо  $P(x, y, z, t)$  в (9)

$$\begin{aligned} u &= -\mu \cdot \rho \cdot g \frac{\partial h}{\partial x}; \\ V &= -\mu \cdot \rho \cdot g \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Підставимо (10) в (8) приходимо до рівняння руху ґрунтових вод.

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\mu \cdot \rho \cdot g \frac{\partial h}{\partial x} (H + h) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\mu \cdot \rho \cdot g \frac{\partial h}{\partial y} (H + h) \right]$$

$$\frac{\mu \rho g}{m} = K$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial x} \left[ (H(x, y) + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + K \frac{\partial}{\partial y} \left[ (H(x, y) + h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \quad (11)$$

Рівняння Буссінеска

$$1 \quad S \cdot u(t) \cdot dt \cdot S(x, t + \xi dt) \quad 0 < \xi < 1 \quad \text{зліва}$$

$$S \cdot u(t) \cdot dt \cdot S(x + \Delta x, t + \xi dt) \quad 0 < \xi < 1 \quad \text{з права}$$

$$dm = S \cdot u(t) [S(x, t + \xi dt) - S(x + dx, t + \xi dt)] dt \quad - \text{середнє по часу в зрізах } x \text{ і } x+dx$$

$$2 \quad dm' = S \cdot dx [S(x + \xi dx, t + dt) - S(x + \xi' dx, t)] \quad 0 < \xi < 1$$

$$3 \quad dm = dm'$$

$$u(t) \frac{S(x, t + \xi dt) - S(x + dx, t + \xi dt)}{\Delta X} \Delta X \cdot dt = dx \frac{S(x + \xi dx, t + \xi dt) - S(x + dx, t)}{\Delta t} \Delta t$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\Delta X \rightarrow 0$$

$$-u(t) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u(t) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\text{Початкові умови} \quad S(x, 0) = \rho_0(x) \\ -\infty < x < \infty$$

$$I. \quad u(t) = U_0 = \text{const}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{U_0} \quad U_0 t + C = x$$

З рис.11.4 слідує



Кількість води, яка входить в паралелепіпед і яка виходить з нього за час  $dt$  через грані  $DC$  і  $AB$  [швидкість  $u(x, y, t)$ ]

маса води = об'єм на густину

$\rho u\{H + h\}dydt$  – грань  $DC$

$\rho u[H + h]dydt + \left\{\frac{d}{dx}[\rho u[h + h]dx\right\}dydt$  – приріст функції  $\rho u(H+h)$  під час переходу в площину  $x+dx$ .

Вздовж осі  $X$  накопичується маса  $-\frac{\partial}{\partial x}[\rho \cdot V(H + h)]dx \cdot dy \cdot dt$

Вздовж осі  $Y$   $-\frac{\partial}{\partial y}[\rho \cdot V(H + h)]dx \cdot dy \cdot dt$

Загальний обсяг води в паралелепіпеді = об'єму  $x$ , щільність води  $\rho$  і коефіцієнт пористості  $m < 1$ :

$$m \cdot \rho(H + h)dx \cdot dy$$

зміна маси за  $dt$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\rho \cdot m(H + h)]dx \cdot dy\right\}dt = \rho \cdot m \frac{\partial h}{\partial t}dx \cdot dy \cdot dt \quad (6)$$

$$\text{так як } \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

сумарні зміни води

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H + h)] + \frac{\partial}{\partial y}[\rho V(H + h)]\right\}dx \cdot dy \cdot dt \quad (5)$$

прирівнюючи (5) і (6), приходимо до **рівняння нерозривності**

$$m \rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \rho \cdot u(H + h) - \frac{\partial}{\partial y} [\rho V(H + h)] \quad (7)$$

$$\text{так як } \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad m \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [u(H + h)] - \frac{\partial}{\partial y} [V(H + h)] \quad (8)$$

## 11.6 Матеріали для повторення

### 11.6.1 Рівняння в часткових похідних першого порядку

а) щоб вирішити рівняння в часткових похідних

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b, \quad (1)$$

де  $a_1, \dots, a_n, b$  залежать від  $x_1, \dots, x_n, z$ , треба написати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \quad (2)$$

та знайти  $n$  незалежних перших інтегралів цієї системи

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x_1, \dots, x_n, z) &= C_1, \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n, z) &= C_n. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Загальне розв'язання рівняння (1) в неявному вигляді записується так:

$$F(\phi_1, \dots, \phi_n) = 0, \quad (4)$$

де  $F$  - довільна диференційована функція.

Зокрема, якщо  $z$  входить тільки в один з перших інтегралів (3), наприклад в останній, то загальне розв'язання можливо записати і так:

$$\phi_n(x_1, \dots, x_n, z) = f(\phi_1, \dots, \phi_{n-1}), \quad (5)$$

де  $f$  - довільна диференційована функція. Розрахувавши рівність (5) відносно  $z$ , отримаємо загальне розв'язання рівняння (1) в явному виді.

б) щоб знайти поверхню  $z = z(x, y)$ , що задовольняє диференціальне рівняння

$$a_1(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \quad (6)$$

та, яка проходить через дану лінію

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = \omega(t), \quad (7)$$

потрібно знайти два незалежних перших інтеграла системи

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b}. \quad (8)$$

В ці перші інтеграли

$$\phi_1(x, y, z) = C_1, \quad \phi_2(x, y, z) = C_2 \quad (9)$$

потрібно підставити замість  $x, y, z$  їх вираження (7) через параметр  $t$ .

Виходить два рівняння виду

$$\Phi_1(t) = C_1, \quad \Phi_2 = C_2. \quad (10)$$

Виключивши з них  $t$ , отримаємо співвідношення  $F(C_1, C_2) = 0$ . Підставивши сюди замість  $C_1$  і  $C_2$  ліві частини перших інтегралів (9), отримаємо шукане розв'язання.

У тому випадку, коли в обидва рівняння (10) не входить  $t$ , тоді лінія (7) являється інтегральною кривою системи (8), тобто характеристикою рівняння (6), і задача Коші має нескінченно багато рішень.

**Приклад.** Знайти загальне розв'язання рівняння

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy, \quad (11)$$

а також інтегральну поверхню, яка проходить через криву

$$y = x^2, \quad z = x^3. \quad (12)$$

**Розв'язання.** Складаємо систему рівнянь

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

і знаходимо її перші інтеграли

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad z^2 + xy = C_2. \quad (13)$$

Отже, загальне розв'язання рівня (11) можливо написати в неявному вигляді

$$F\left(\frac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0$$

де  $F$  - довільна функція. Так як  $z$  входить тільки в один з перших інтегралів (13), то загальне розв'язання можливо написати і в явному виді. Ми отримаємо

$$z^2 + xy = f\left(\frac{x}{y}\right); \quad z = \pm \sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right) - xy},$$

де  $f$  - довільна функція.

Щоб знайти інтегральну поверхню, яка проходить через лінію (12), запишемо цю лінію в параметричному вигляді, наприклад, взявши  $x$  в якості параметра:

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Підставивши цей вираз в (13), отримаємо

$$\frac{1}{x} = C_1, \quad x^6 + x^3 = C_2.$$

Виключивши  $x$ , отримаємо

$$\frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_2^3} = C_2.$$

Підклавши замість  $C_1$  і  $C_2$  ліві частини перших інтегралів (13), знайдемо шукане розв'язання

$$\left(\frac{x}{y}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$$

в) рівняння Пфаффа.

Рівняння виду

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (14)$$

називається рівнянням Пфаффа. До нього зводиться задача про знаходження сімейства поверхонь  $u(x, y, z) = C$ , ортогональних векторним лініям поля  $F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ . При цьому  $dx, dy, dz$  - координати вектора, лежачого в дотичній площині до шуканих поверхонь.

Якщо поле  $F$  потенційно, тобто  $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial u}{\partial z}$ , то шукана поверхня  $U$  знаходиться за допомоги криволінійного інтеграла:

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (15)$$

Якщо поле  $F$  не потенційне, то в деяких випадках можливо підібрати множник  $\mu = \mu(x, y, z)$  так, щоб потенційним виявиться поле  $\mu F$ . Отже,

$$\mu P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Необхідною і достатньою умовою існування сімейства поверхонь, ортогональних векторним лініям, являється рівність  $(F, \text{rot}F)=0$ . Якщо ця умова виконана, то рівняння (11) можливо інтегрувати як за допомогою інтегруючих множників, так і за допомогою наступного методу вважають деяку змінну в рівнянні (11) постійною і інтегрують частину, що залишилась рівняння. В отриманому інтегралі постійну інтегрування приймають за невідому функцію від раніше зафіксованої змінної та підбирають її таким чином, щоб інтеграл задовольняв рівняння (11).

Якщо  $(F, \text{rot}F)=0$ , то говорять, що рівняння (11) інтегрується одним співвідношенням. Якщо  $(F, \text{rot}F) \neq 0$ , то рівняння Пфаффа інтегрують двома співвідношеннями, тобто шукають не поверхні, ортогональні векторним лініям поля  $F$ , а лінії, які володіють тими же властивостями і які лежать на заданій поверхні  $u(x, y, z)=0$ . Виключивши одну з змінних з рівняння (11) і  $u(x, y, z)=0$ , отримаємо звичайне диференціальне рівняння першого порядку.

### 11.6.2 Завдання

Знайти загальне розв'язання або загальний інтеграл рівняння:

$$1. (x+2) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

$$2. (x-z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y-z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$3. e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$$

$$4. (y+z) \frac{\partial u}{\partial x} + (x+z) \frac{\partial u}{\partial y} + (x+y) \frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

Знайти розв'язання рівняння, задовольняючих умови:

$$5. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u = yz \quad \text{при} \quad x = 1.$$

## 12. МЕТОДИ САМОКОНТРОЛЮ

### 12.1 Прикидки

В процесі застосування математики до розв'язку реальної задачі видача результату зазвичай пов'язана з певною моральною та/або матеріальною відповідальністю. Тому на всіх стадіях дослідження з метою запобігання помилок широко використовуються різноманітні методи самоконтролю.

Більшу користь, при чому не тільки для самоконтролю, приносять різного роду прикидки, котрі можуть бути направлені як на отримання попередніх відомостей про сам розв'язок, так і на спрощення рівнянь задачі – що, втім, взаємопов'язано. Для першого корисно неформальне обговорення умов задачі, по можливості чітке представлення картини процесу, що вивчається, залучення фізичних міркувань, інтуїції, аналогій з раніше вивченими випадками і т. д. Цю прикидку можна отримати і за допомогою максимально можливого спрощення геометричних форм та рівнянь задачі. Знання, хоча б грубе, про якісні та кількісні характеристики шуканого розв'язку може допомогти при виборі більш точного методу – зокрема, при виборі нульового наближення в ітераційних методах, дає можливість вказати характерні значення величин, які приймають участь, а в ряді випадків і спростити рівняння задачі. Порівняння властивостей розв'язання, котре було отримане більш точнішими методами, з попередніми відомостями про нього дає додатковий засіб контролю, так як відповідність цих даних значно підвищує довіру до результатів. Значна розбіжність між цими даними свідчить про помилковість або одних, або інших (а можливо, і тих і інших одночасно); в цьому випадку необхідна перевірка і обговорення всіх даних. Таке обговорення корисне і для розвитку інтуїції в області, до якої відноситься задача яка розв'язується.

Як було сказано вище, за допомогою прикидок ми можемо отримати характерні значення величин, які приймають участь та перейти до безрозмірної форми рівнянь задачі. Це дає можливість прикинути величину окремих членів

рівняння та порівняно незначні члени або ж відкинути, або ж врахувати за допомогою методу малого параметру. Після розв'язку спрощеного таким чином рівняння можна шляхом підстановки перевірити, чи справді відносно незначні ті члени, які були відкинуті.

Прикидки систематично проводяться і для поточного контролю обчислення арифметичних і більш складних виразів, інтегралів і т. д., особливо у випадках, коли є загроза зробити помилку в порядку величини (неправильно записати показник степеню біля десятки).

Наведемо приклад того, як прикидка порядку величини дозволяє виявити грубу помилку. У відомій повісті А.Р. Беляєва «Продавець воздуха» є такий епізод. Оповідач разом з головним лиходієм відвідує склад, де зберігаються якісь шарики. Перший намагається підняти шарик, але не може, на що другий каже: це не дивно, не всякий кінь може зрушити з місця поклажу з таким шариком, бо в ньому міститься кубічний кілометр повітря... Читача, який звик до прикидок реальних значень фізичних величин, це зауваження про коня зразу насторожує: справді, так як маса  $1 \text{ м}^3$  повітря дорівнює 1,3 кг, то маса  $1 \text{ км}^3$  повітря в  $(10^3)^3$  раз більша, тобто дорівнює  $1,3 \times 10^9$  тон! Мабуть, розгадка «коня» в тому, що, згідно з фантастом,  $1 \text{ км}^3$  містить  $10^3 \text{ м}^3$ .

## 12.2 Контроль розмірності

Цей простий, але важливий тест, складається з трьох правил: 1) додавати одну з одним та пов'язувати нерівністю можна лише величини однакової розмірності; 2) якщо розмірність якоїсь величини, представленої деякою формулою, відома заздалегідь, то ця розмірність повинна витікати із даної формули; 3) аргумент трансцендентної (тобто неалгебраїчної) функції повинен бути безрозмірним, тобто числом (зокрема, безрозмірним має бути і аргумент



тригонометричних функцій у відповідності до правила:  $\sin(\text{кута в } x \text{ радіан}) = \sin(\text{числа } x)$ ).

Нехай, наприклад, величини  $a$ ,  $b$  мають розмірність довжини. Тоді, якщо у процесі викладок отримано вираз  $a^2 + 2b$  або  $a^2 + \sqrt{a^2 - b^2}$ , чи просто  $a + 1$ , то це свідчить про допущену помилку, так як порушено перше правило. Аналогічно, якщо отримано вираз для площі  $S = \frac{a^2 + b^2}{a - b}$ , то порушене друге правило. Так як помилку бажано знайти по можливості раніше, описану перевірку слід проводити не тільки після закінчення виводу того чи іншого співвідношення, але й на проміжних стадіях цього виводу.

Відмітимо, що якщо в попередньому прикладі  $a$ ,  $b$  представляють собою значення безрозмірної довжини, тобто числові значення довжини, виражені через деяку одиницю виміру, то усі виписані вирази можливі (звісно, тоді під  $S$  розуміють безрозмірну площу). Для безрозмірних величин правила контролю розмірності не діють.

Наведемо ще приклад. Якось в науковому журналі зустрівся вираз  $e^{-2t}$ , причому доповідач стверджував, що  $t$  – це фізичний (розмірний) час. Він не помітив, що в силу третього правила контролю такий вираз допустимий лише якщо  $t$  – безрозмірний час.

Прагнення до контролю розмірності призводить до того, що якщо у формулюванні задачі дані конкретні значення параметрів, то часто виявляється зручно позначити ці значення буквами, вважаючи їх розмірними, потім розв'язати задачу у буквеному вигляді і лише після цього підставити замість букв їх значення. При переході до дій з числами додається *контроль системи одиниць*, згідно з яким всі величини мають бути вираженими в одній і тій же системі одиниць.

Ось простий приклад. Нехай потрібно обчислити масу мідної пластинки, вирізаної із листа товщиною  $\delta = 0,72$  мм, котра має форму рівнобедреного трикутника з основою  $a = 5,2$  см і бічною стороною  $b = 3,7$  см. Для розв'язання позначимо розмірні масу та густину відповідно літерами  $m$  і  $\rho$ ; тоді легко вивести формулу

$$m = \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \delta \rho. \quad (12.1)$$

Неважко перевірити, чи виконані правила контролю розмірності. При обчисленнях слід підставити  $\rho = 8,96 \text{ г/см}^3$  і не забути перевести  $\delta$  в сантиметри; отримуємо

$$m = 2,6 \cdot \sqrt{3,7^2 - 2,6^2} \cdot 0,072 \cdot 8,96 = 4,4 \text{ г}$$

### 12.3 Інші види контролю

Перечислимо ще деякі (не всі!) методи контролю, які застосовуються.

*Контроль законів збереження.* Якщо в змістовній моделі втрати енергії вважались нехтовно малими, то математична модель повинна задовольняти умові збереження енергії, а тому і для розв'язків повинна проявлятися ця властивість. Наприклад, так було для осцилятора, рівно як і для його моделі. Справді, якщо обидві частини цього рівняння помножити на  $dx/dt$  і виконати інтегрування, то отримаємо співвідношення

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{k}{2} x^2 = \text{const}$$

котре і являється математичною моделлю закону збереження енергії. Можна прослідкувати його і для розв'язку, так як

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{k}{2} x^2 &= \frac{m}{2} \left( -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)^2 \\ &+ \frac{k}{2} \left( C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)^2 = \frac{k}{2} (C_1^2 + C_2^2) = \text{const} \end{aligned}$$

Якщо ж в змістовній моделі втрати енергії були враховані, то відповідну властивість повинна мати також математична модель та розв'язок. Аналогічну перевірку корисно проводити для закону збереження кількості руху та інших подібних законів. Як правило, аналоги фундаментальних законів варто зберігати

і при переході до обчислюваного алгоритму, так як цим забезпечується правильна передача розв'язком найбільш глибоких властивостей об'єкта, який модулюється.

*Контроль характеру залежності розв'язку від параметрів задачі.* Тут мова йде про перевірку напрямку, а іноді і швидкості зміни знайденої величини при зміні параметрів задачі: ці напрямки, які витікають із виведених співвідношень, повинні бути такими, як і витікає зі смислу задачі. Так із формули (12.1) ми бачимо, що  $m$  пропорційне  $\delta$  і  $\rho$  і зростає з ростом  $b$ ; але все це стає відразу зрозумілим, якщо чітко представити ситуацію. Вказаний контроль також бажано по можливості проводити і в проміжних формулах.

*Контроль екстремальних ситуацій.* Завжди виявляється надзвичайно корисним прослідкувати за тим, який вигляд приймають як вихідні, так і проміжні і кінцеві співвідношення, а також висновки із дослідження моделі, якщо її параметри наближаються до крайніх допустимих для неї значень – найчастіше до нуля або до нескінченності. В таких екстремальних ситуаціях задача часто спрощується або вироджується, так що співвідношення набувають більш наглядне розуміння і можуть бути перевірені – якщо, як це часто буває, відповідні їм розв'язки можна отримати незалежно від аналізу загального випадку або якщо вони заздалегідь відомі.

Так, в останній задачі при наближенні  $a$ ,  $\delta$  чи  $\rho$  до нуля об'єкт вироджується і маса переходить в нуль; теж саме витікає із формули (12.1), що слугує її підтвердженням. Виродження відбувається також і якщо  $a$  фіксоване, а  $b \rightarrow a/2$ , або ж якщо  $b$  фіксоване, а  $a \rightarrow 2b$ ; це витікає також із (12.1). Якщо одна з величин  $\delta$ ,  $\rho$ ,  $b$  прямує до нескінченності, а інші, як і  $a$ , фіксовані, то і  $m \rightarrow \infty$ ; це витікає як зі змісту задачі, так і з формули (12.1).

*Контроль математичної замкнутості* полягає в перевірці того, чи дають виписані математичні співвідношення можливість розв'язати поставлену математичну задачу, тобто що математична модель повна. Таким чином, якщо задача звелася до пошуку невідомих величин за допомогою розв'язку системи кінцевих рівнянь, котрі повинні задовольнятися точно, то слід перевірити, що

цих рівнянь – у всякому випадку, незалежних – стільки ж, скільки і залежних. Якщо задача звелася до пошуку конкретного розв’язку диференційного рівняння, то необхідно перевірити, що поставлені також додаткові (початкові, граничні) умови, які визначають цей розв’язок. (В такому випадку після отримання розв’язку бажано ще перевірити, що поставлені додаткові умови враховані і що побудована функція дійсно їм задовольняє.)

Скажемо ще про такий спосіб перевірки правильності кінцевого або проміжного результату: якщо складним, обхідним шляхом отримана проста формула, то намагаються знайти більш прямий шлях її виводу, що дасть можливість не тільки підтвердити її істинність, а також зрозуміти її більш глибоко. В якості простого прикладу введемо формулу для похідної в напрямку від скалярного поля  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , де  $x, y, z$  – декартові координати у просторі. Із розрахунків бачимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial l} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\widehat{x, l}) + \\ &\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\widehat{y, l}) + \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\widehat{z, l}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (xi + yj + zk) \cdot (\cos(\widehat{x, l})i + \cos(\widehat{y, l})j + \cos(\widehat{z, l})k) = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}^0 = \mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{l}^0; \end{aligned}$$

Тут крапкою позначений скалярний добуток, а нуликом – одиничний вектор. Однак скалярний добуток одиничних векторів рівний косинусу кута між ними, тобто отримуємо формулу

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \cos(r, l).$$

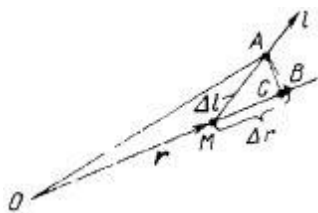


Рис. 12.1. Графічний вивід формули

Її простота підказує, що повинен бути її безпосередній висновок. І дійсно, цей висновок одразу ж отримується із розгляду рис.12.1 (AB – дуга окружності із центром в O, відрізок AC перпендикулярний до  $\mathbf{r}$ ), так як при нескінченно

малому  $\Delta l$  величини  $|MB|$  та  $|MC|$  еквівалентні, а тому

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta r(=|MB|)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{|MC|}{\Delta l} = \cos(r, l).$$

## 12.4 Роль прикладів

Для успішного дослідження математичної моделі, уникнення помилок особливо велика роль правильної інтуїції, орієнтування в розглянутому колі питань. А для цього, у свою чергу, вельми корисним виявляється докладний розбір прикладів, окремих випадків, елементів моделі. За допомогою таких прикладів можна вибирати і відпрацьовувати методи дослідження математичної моделі, формулювати і перевіряти ті або інші гіпотези. Кожен приклад служить як би моделлю цікавить нас більш загальної або більш складної моделі, він виявляє деякі властивості останньої і сприяє їх розумінню. Істотно, що приклади часто вдається досліджувати значно детальніше й з більш високою достовірністю, ніж загальну модель. (Втім, при перенесенні властивостей прикладу на більш загальний клас об'єктів треба завжди мати на увазі, що деякі з цих властивостей можуть виникати саме із специфіки даного прикладу.)

Особливо велика роль прикладів при спростуванні неправильних гіпотез: твердження «всі лебеді білі» спростовується пред'явленням хоча б одного чорного лебедя.

Наведемо деякі «приклади прикладів». Легко перевірити, що якщо лінійне однорідне автономне диференціальне рівняння містить похідні тільки парного порядку та має хоча б один кратний характеристичний корінь  $\lambda$ , то в фундаментальну систему рішень цього рівняння входять функції  $te^{\lambda t}$  та  $te^{-\lambda t}$ , а так як принаймні одна з них безмежно зростає по модулю при  $t \rightarrow \infty$ , то таке рівняння нестійке. Виходячи з цього, Лагранж, а за ним і Лаплас стверджували, що і лінійна автономна механічна система, в якій сили тертя знехтуємо малі, в випадку кратних характеристичних коренів через появу таких доданків завжди виявляється нестійкою. На математичній мові це означає, що система рівнянь виду

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

з постійними коефіцієнтами при наявності кратного кореня обов'язково нестійка. Те, що це не завжди так, одразу видно, якщо в якості  $\|a_{jk}\|$  взяти одиничну матрицю.

Такий вид при  $n = 2$  має після переходу до безрозмірним координатам лінеаризовані система рівнянь коливань маятника, що має дві ступені свободи, близько нижнього положення рівноваги - очевидно, стійкого. Ця знаменита в історії механіки помилка Лагранжа вийшла, як вважають історики, через те, що йому взагалі не було властиво супроводжувати загальні міркування прикладами.

Розглянемо ще питання про вплив неузгодженості між початковими та граничними умовами на розв'язання рівняння з приватними похідними. Нехай, наприклад, розглядається деякий процес, що відбувається в напів нескінченному стержні,  $0 \leq x < \infty$ , починаючи з моменту  $t = 0$ . Тоді при  $t = 0$  ставиться початкова умова, а при  $x = 0$  - гранична умова. Таким чином, при  $x = 0$ ,  $t = 0$  виявляються поставленими і те й інше умови. Якщо вони суперечать одне одному, то говорять про їх неузгодженості. Як таке неузгодженість позначається на вирішенні завдання? (Строго кажучи, тут треба говорити про узагальнений рішення).

Виявляється, що відповідь суттєво залежить від так званого типу рівняння, що легко продемонструвати на прикладах. Найпростішим представником рівнянь «гіперболічного» типу, що описують процеси, що поширюються з кінцевою швидкістю, є рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Нехай початкові і граничні умови мають, відповідно, вид

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0,$$

причому функція  $u_0$  неперервна. Тоді, виходячи з формули  $u = f_1(x - at) + f_2(x + at)$  для спільного вирішення, можна отримати явне вираження для вирішення

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [u_0(x + at) - u_0(at - x)] & (0 < x < at), \\ \frac{1}{2} [u_0(x + at) + u_0(x - at)] & (at < x < \infty) \end{cases}$$

$$(0 < t < \infty). \quad (12.3)$$

Але що відбувається при  $x = at$ , коли формули змінюються? Якщо  $x \rightarrow (at)^+$ , тобто  $x$  наближається до  $at$  з боку великих значень, то значення другої формули (12.3) маємо

$$u \rightarrow \frac{1}{2} [u_0(2at) + u_0(0)] \quad (x \rightarrow (at)^+).$$

Якщо ж  $x \rightarrow (at)^-$ , то в силу першої (12.3) формули

$$u \rightarrow \frac{1}{2} [u_0(2at) - u_0(0)] \quad (x \rightarrow (at)^-).$$

Таким чином, при  $u_0(0) \neq 0$  (це і є умова неузгодженості початкових умов з граничними) розв'язання має розрив уздовж усього променя  $x = at$ ,  $0 \leq t < \infty$ , в «світової» площині  $x, t$ . Цей промінь описує поширення збурення, що виникли при  $t = 0$  в точці  $x = 0$ .

Виявляється, що описана картина характерна для всіх рівнянь «гіперболічного» типу, які описують хвильові процеси. При неузгодженості початкових умов з граничними у вирішенні у разі одномірних задач виникають лінії розриву, подібні зазначеної; для двовимірних та тривимірних задач розмірність різноманіття, на якому розв'язання має розрив, відповідно підвищується. Відзначимо, що в розібраному прикладі лінія розриву виявилася пряма. Це пов'язано зі специфікою прикладу (припущенням про однорідність стрижня) і в загальному випадку може не мати місця.

Розглянемо тепер аналогічне питання для одновимірних рівнянь теплопровідності - найпростішого представника рівнянь «параболічного» типу, що описують процеси, що поширюються з формально нескінченною швидкістю. Нехай початкові та граничні умови мають відповідно вид

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 (= \text{const}), \quad \theta|_{x=0} = 0,$$

а розв'язання будується при  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Розв'язання можна отримати за методом відображення: початкову функцію  $\theta_0(x) \equiv \theta_0$  ( $0 < x < \infty$ ), продовжити на негативну піввісь непарним чином, тобто покласти  $\theta_0(x) \equiv -\theta_0$  (-

$-\infty < x < 0$ ), після чого вирішити рівняння (5.18) на всій осі  $x$  за допомогою формули Пуассона, але розв'язання розглянути тільки при  $x > 0$ , так як при вказаному продовженні поставлене граничне умова обов'язково задовольняється (скільки тепла йде в точку  $x = 0$  праворуч, стільки ж холоду - зліва).

Розгляд отриманої формули для  $\theta(x, t)$  показує, що розв'язання при  $t > 0$  ( $-\infty < x < \infty$ ) володіє неперервними похідними всіх порядків, тобто початкова неузгодженість відразу ж ліквідується, не породжуючи ніяких розривів. Ясно, що даний приклад для рівняння теплопровідності є типовим, тобто отриманий висновок має загальний характер. Виявляється, що цим же властивістю володіють і інші рівняння параболічного типу.

## 12.5 Про верифікації моделі

Проблема верифікації моделі, тобто з'ясування її адекватності, значно виходить за рамки самоконтролю, але про неї не можна не згадати. Чи справді, складаючи рівняння та вибираючи вихідні дані, ми правильно врахували всі істотні для нас фактори, причому з необхідною точністю? Відповідь на це питання має кардинальне значення для проведеного дослідження або розрахунку.

Якщо мова йде про моделі, досить апробованої в розглянутій області додатків, то питання про верифікацію зазвичай не виникає, ми повністю покладемося на попередників. Він стає істотним, якщо ми або будемо модель заново, застосовуючи відомі раніше прийоми, або застосовуємо відому модель поза рамками, в яких вона показала себе адекватною, або, нарешті, будемо принципово нову модель. У всіх цих випадках, особливо у двох останніх підтвердження адекватності моделі вельми бажано, без цього така адекватність залишається лише більш-менш правдоподібною гіпотезою.



Основним підтвердженням адекватності прийнятої моделі є згода наслідків з неї з відомими з експерименту або з незалежних теоретичних досліджень властивостями модельованого об'єкта. При цьому, чим більше виявиться таких незалежних підтверджень, тим більшу довіру набуває модель.

Так, наприклад, нас може цікавити форма нормальних (тобто гармонічних або затухаючих гармонічних) коливань системи, але з експерименту нам відомі тільки їх частоти; тоді збіг розрахованих частот з експериментальними може служити підтвердженням правильності розрахунку форм. Збіг розрахованих прогинів з експериментальними при будь-яких комбінаціях значень параметрів (чим більше таких комбінацій, тим краще) може служити підтвердженням правильності розрахунків прогинів при інших комбінаціях значень. Правильність моделі може підтверджуватися і передбаченням з її допомогою будь-якого ефекту, що відноситься до відомого минулого («пророкуванням минулого по передминулому»).

Часом буває й так: ми з допомогою моделі отримуємо тільки ті результати, які нам уже відомі з досвіду. При цьому модель підтверджується як би про запас, у розрахунку на подальші застосування в умовах, не охоплених експериментом. До того ж математичний аналіз властивостей об'єкта часто призводить до їх глибшого розуміння, що корисно саме по собі.

Відзначимо ще наступну важливу обставину: при теоретичному підтвердженні моделі треба стежити за незалежністю підтверджуючих міркувань від підтверджуваних. Припустимо, що ми описуємо поведінку реального об'єкта за допомогою системи диференціальних рівнянь, причому, вирішивши цю систему за методом Гальоркіна, виявили хороший збіг з раніше відомим розв'язанням тієї ж системи, отриманим за методом сіток. Чи служить цей факт підтвердженням адекватності моделі? Звичайно, ні, він говорить тільки про правильність розв'язання системи диференціальних рівнянь.

Якщо виявлено істотну розбіжність між розрахованими і відомими властивостями, то модель необхідно змінити. Це можна робити, або залучаючи

додаткові теоретичні міркування, або шляхом підгонки, або за допомогою комбінації того й іншого.

Розглянемо як приклад процес падіння дощової краплі середнього розміру з висоти  $H = 300$  м з нульовою початковою швидкістю. Застосування «шкільної» формули  $s = gt^2 / 2$  дає час падіння  $T = \sqrt{2H / g} = 7,8$  с. Однак фактично крапля падає близько 40 с, що показує неадекватність «шкільної» моделі в даних умовах. Причина неадекватності тут зрозуміла: не враховано опір повітря, яке в даній ситуації робить досить значний вплив. Спробуємо врахувати цей опір. Найпростіше припущення, не суперечить здоровому глузду, таке: сила опору пропорційна швидкості руху краплі. При цьому припущенні рівняння руху набуває вигляду

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k \frac{dx}{dt}$$

( $x$  відраховується вниз від точки початку падіння), де  $m$  - маса краплі, а  $k > 0$  - коефіцієнт тертя. Звідси при нульових початкових умовах отримуємо розв'язання

$$x = \frac{gm^2}{k^2} \left( \frac{k}{m} t - 1 + e^{-(k/m)t} \right) \quad (12.4)$$

і співвідношення між  $H$ ,  $T$  і  $k / m$ :

$$H \left( \frac{k}{m} \right)^2 = g \left( \frac{k}{m} T - 1 + e^{-(k/m)T} \right). \quad (12.5)$$

Якщо  $k / m$  відомо, то при заданому  $H$  звідси можна знайти  $T$ , вирішивши (наприклад, методом ітерацій) трансцендентне рівняння

$$\alpha = 1 + \frac{H}{g} \left( \frac{k}{m} \right)^2 - e^{-\alpha}$$

і поклавши потім  $T = \alpha m / k$ . Значення до можна отримати теоретично за відомою формулою Стокса  $k = 6\pi\mu r$ , де  $\mu$  - коефіцієнт в'язкості повітря, а  $r$  - радіус краплі. Ми тут зробимо інакше: розглянемо  $k / m$  як підгінним коефіцієнт, що забезпечує заданий час падіння краплі. Тоді  $k / m$  треба знайти з

рівняння (12.5), вважаючи  $H$  і  $g$  заданими. Для  $k/m$ , вираженого в  $c^{-1}$ , отримуємо рівняння

$$300\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 9,81\left(40\frac{k}{m} - 1 + e^{-40k/m}\right),$$

звідки знаходимо значення  $k/m = 1,28$ , тобто формула (12.4) набуває вигляду

$$x = 7,7t - 6,0\left(1 - e^{-1,28t}\right) \quad (e - \text{в } c, x - \text{в } m).$$

Ми бачимо, що вже після 2-3 секунд падіння швидкість виявляється майже рівної свого граничного значення 7,7 м / с, так що модель, заснована на припущенні про рівноприскорений рух, виявилася повністю неадекватною.

## 12.6 Поширені помилки

### 12.6.1 Помилки у виборі моделі

Ці помилки можуть відбуватися від різноманітних причин. Найочевиднішою є нерозуміння ситуації, що приводить до вибору неадекватних гіпотез. Яскравий приклад навів англійський астроном А. Еддінгтон: рибалка, який ловив рибу тільки однією сіткою, вирішив, розглядаючи свої улови, що найменші серед пійманих риб - це найменші риби у морі; він припустився грубої помилки, не враховуючи важливу особливість ситуації - певний розмір осередків сітки.

Модель може виявитися неадекватною також через те, що при її побудові була застосована схема (коло уявлень, поняття та їх зв'язку), розроблена і

адекватна для іншої області явищ, до якої досліджуване явище не відноситься; гіпотези, на які спирається модель, можуть у досліджуваній ситуації бути необґрунтованими або навіть несправедливими. Приклад такої помилки - застосування ламінарної моделі течії рідини в умовах, коли насправді ця течія турбулентна. Іншим прикладом може служити незаконна спроба провести аналогію між розрахунками балки на рівномірно розподілене статичне навантаження та рівномірно розподілене імпульсивне навантаження: в дійсності залежність прогину балки та згинального моменту від параметрів балки в цих випадках принципово різна.

Звичайно, будь-яке скільки-небудь істотно нове дослідження вимагає виходу за рамки вже випробуваної області і це тягне за собою деяку можливість помилки; розумний ризик тут необхідний. Однак, як ми вже говорили, потрібно намагатися бачити слабкі місця в міркуванні, щоб у разі необхідності зробити відповідні корективи або навіть повністю змінити модель.

Неадекватність, особливо кількісна, математичної моделі може виникати також від надмірних, що виходять за допустимі рамки спрощень модельованого об'єкта - спрощень геометричних форм, вихідних залежностей одних величин від інших (або навіть заміни невідомих залежностей на вигадані) і т. п. Складність полягає в тому, що спрощення необхідні, але чи припустимо те чи інше конкретне спрощення, заздалегідь далеко не завжди буває ясно.

### 12.6.2 Вплив інтерполяції та екстраполяції

При побудові та дослідженні математичних моделей нам постійно доводиться користуватися різними залежностями між величинами - як вихідними, в тому числі емпіричними залежностями, так і зображеннями, що виходять в процесі дослідження. При цьому широко застосовуються

інтерполяція і екстраполяція, які можуть як істотно допомогти дослідженню, так і виявитися джерелом помилок.

Найгрубіші задачі інтерполяції виникають при підборі емпіричної формули за даними вимірювання. Тут треба застерегти від формального, сліпого підбору такої формули тільки по вимірним значенням. Вибір виду формули (многочлен, ступенева функція, експонента і т. д.) повинен спиратися на теоретичне обговорення різних властивостей досліджуваної залежності. Після цього вибору параметри, що входять у формулу, можна знайти за методом найменших квадратів або як-небудь інакше. При цьому застосовуваний метод повинен бути стійким стосовно можливих помилок вимірювання.

Наведемо приклад. Нехай вимір величини  $y$  залежно від величини  $x$  дало наступні результати:

$x$	0	0	0	1
	,0	,1	,2	,0
$y$	0	0	0	1
	,42	,50	,52	,25

(відповідні точки показані кружками на рис. Варіанти інтерполяції), причому в значеннях  $y$  допускалася похибка до 0,05. Як відомо, за чотирма значеннями можна підібрати многочлен 3-го ступеня, який точно приймає ці значення.

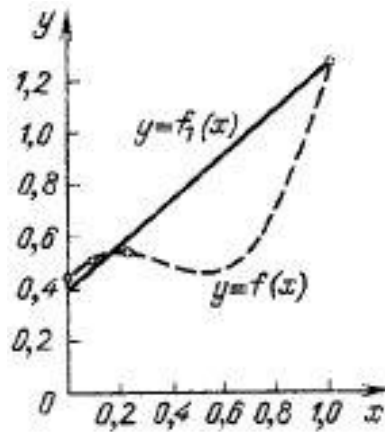


Рис. Варіанти інтерполяції

В даному випадку цей многочлен  $f(x)$  має вигляд (коефіцієнти виписані з точністю до 0,01)

$$f(x) = 3,79x^3 - 4,14x^2 + 1,18x + 0,42,$$

а його графік показаний на рис. Варіанти інтерполяції штриховою лінією. Як бачимо, поведінка цього многочлена при  $0,2 < x < 1,0$  абсолютно не впливає в якісному відношенні із заданих умов і «хитання» значень  $y$  в рамках допустимої похибки може істотно змінити його значення на цьому інтервалі. Істотно більшу довіру в даному прикладі викликає многочлен першого ступеню  $f_1(x)$ , знайденої за методом найменших квадратів. Підрахунок дає, що

$$f_1(x) = 0,84x + 0,40;$$

відповідний графік показаний на рис. Варіанти інтерполяції суцільною лінією. Відхилення значень  $f_1(x)$  від вимірених не перевищують 0,048, тобто знаходяться в допустимих рамках.

Спеціальної уваги вимагають можливі особливості досліджуваної залежності - розриви, гострі екстремуми і т. п., які можуть виявитися визначальними, тоді як при «сліпій» інтерполяції їх можна не помітити.

Якщо при інтерполяції обговорення реального сенсу досліджуваної залежності у багатьох випадках вельми корисно, то при екстраполяції таке обговорення завжди є центральним, вирішальним елементом процедури. Ми

вже говорили, що інтерполяцію однієї і тієї ж залежності можна здійснити різними формулами. Але навіть якщо ці формули на інтервалі інтерполяції дають близькі значення, то при видаленні від нього вони можуть приводити до принципово різних результатів. Необґрунтоване поширення формул з вихідного на істотно більш широкі інтервали може призводити до кричущих помилок, чому є багато прикладів. Особливо поширена формальна екстраполяція за допомогою лінійної функції або експоненти, в основі чого лежить уявлення (не завжди явно висловлювана!) Про незмінність тих чи інших вирішальних факторів.

Таким чином, побудова екстраполяційної формули або диференціального рівняння, розв'язання якого повинно екстраполювати досліджувану залежність на скільки-небудь значне віддалення від вже вивченого інтервалу, можливо тільки при глибокому аналізі впливу суттєвих факторів, їх взаємодії, посилення або послаблення при відході від цього інтервалу і т. п.

### 12.6.3 Помилки у виборі методу дослідження

Одна з поширених помилок полягає в недостатній цілеспрямованості дослідження. Це стосується як випадків, коли дослідник не уявляє собі чітко, що він збирається шукати, так і випадків, коли таке подання є, але рух до мети відбувається по занадто звивистому шляху і при цьому видобувається занадто багато по суті непотрібної інформації. Звичайно, при вирішенні будь-якої скільки-небудь складної задачі отримання надлишкової інформації неминуче. Але різними методами властиво породжувати різні обсяги такої інформації, і це треба враховувати при виборі методу. Ще Лаплас сказав: щоб з'ясувати, що після дощу трава буде мокрою, немає потреби обчислювати траєкторії всіх крапель ...

Для зменшення обсягу надлишкової інформації часто буває корисним по можливості пряме вивчення інтегральних характеристик аналізованої системи і застосування різних інтегральних співвідношень - таких, як закон збереження енергії і т. п. У цьому сенсі повчальні загальні теореми динаміки механічної системи; наприклад, теорема про рух центру інерції не дозволяє описати рух кожної з точок системи, але дає можливість отримати інтегральне уявлення про рух, у багатьох випадках достатня для додатків.

В якості іншої поширеної помилки вкажемо на недостатню увагу до доброякісності вихідних даних. Велика праця, витрачена на реалізацію самого точного чисельного методу, буде в значній мірі знецінено, якщо скористатися невірними або надто неточними вихідними даними. Більш того, якщо не звернути уваги на недостовірність цих даних, то можна зробити невірне уявлення про доброякісність остаточного висновку, причому спокуса повірити в такий висновок буде тим більшим, чим більш важкою була математична задача. Коли ж недоброякісність результату буде виявлена, весь метод може виявитися незаслужено спалюваним. Тому обраний метод розв'язання задачі повинен бути розрахований на введення в нього тільки таких даних, які можна реально отримати з необхідною достовірністю. Якщо достатньо точні вихідні дані отримати не представляється можливим, то у багатьох випадках буває доцільно змінити метод - зазвичай спростивши його, щоб працю, пов'язану із застосуванням методу високої точності, не виявився марним.

Сумну роль може зіграти помилка у виборі обчислювального алгоритму. Метод, коректний в «домашньому» розумінні, може виявитися нестійким щодо помилок округлення, що досить часто буває при вирішенні крайових задач на ЕОМ. Це може призвести навіть до неправильних висновків про властивості модельованого об'єкта, так як чисто обчислювальний ефект можна прийняти за фізичний. Наприклад, якщо проводиться розрахунок течії рідини і при переході характерної швидкості потоку через деяке значення розв'язання з «гладкого» перетворюється на сильно осцилюючих, то це не обов'язково



говорить про зміну ламінарного режиму турбулентним: може виявитися, що при цьому переході застосовуваний обчислювальний метод став нестійким.

Зустрічаються і багато інших помилок математичного характеру. Тут можна порадити тільки освоювати застосовувану область математики, розбирати методи застосування математики до завдань, аналогічним цікавлячим Вас, накопичувати досвід та інтуїцію, а в разі ускладнень звертатися до фахівців за консультацією.

## 12.7 Матеріали для повторення

Приведення до канонічного вигляду рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними

Рівняння

$$A(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

Належить до

- 1) гіперболічного типу, якщо  $B^2 - AC > 0$ ;
- 2) параболічного типу, якщо  $B^2 - AC = 0$ ;
- 3) еліптичного типу, якщо  $B^2 - AC < 0$ ;

Щоб привести рівняння (1) до канонічного вигляду, необхідно скласти рівняння характеристик

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + Cdx^2 = 0, \quad (2)$$

яке розпадається на два рівняння

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0 \quad (3)$$

$$A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0 \quad (4)$$

і знайти їх загальні інтеграли  $\vartheta_1(x, y) = C_1$ ,

$$\vartheta_2(x, y) = C_2.$$

1) Для рівняння гіперболічного типу  $B^2 - AC > 0$  загальні інтеграли  $\vartheta_1(x, y) = C_1$  і  $\vartheta_2(x, y) = C_2$  будуть дійсними і різними, вони визначають два різних сімейства дійсних характеристик.

Після введення нових незалежних змінних  $\xi$  і  $\eta$  замість  $(x, y)$ , при чому

$$\xi = \vartheta_1(x, y), \eta = \vartheta_2(x, y),$$

рівняння (1) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(\xi, \eta, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta})$$

Це і є канонічний вигляд рівняння гіперболічного типу.

Поклавши  $\xi = \mu + \nu$ ,

$$\eta = \mu - \nu$$

прийдемо до другого канонічного вигляду рівнянь гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2} = \Phi(\mu, \nu, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}).$$

2. Для рівняння параболічного типу:  $B^2 - AC = 0$

Рівняння (3) і (4) співпадають, і ми отримуємо один загальний інтеграл:

$$\xi(x, y) = C.$$

У цьому випадку вважається

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

де  $\eta = \eta(x, y)$  - така функція, що

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

в розглянутій області, наведемо рівняння (1) до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Це канонічний вигляд рівняння параболічного типу.

3. Для рівняння еліптичного типу:  $B^2 - AC < 0$

Загальні інтеграли рівнянь (3) і (4) - комплексно сполучені; вони визначають два сімейства уявних характеристик.

Нехай загальний інтеграл рівняння (3) має вигляд

$$\zeta(x, y) + i\Psi(x, y) = C,$$

де  $\zeta$  і  $\Psi$  - дійсні функції.

Тоді вважається

$$\zeta = \zeta(x, y), \quad \eta = \Psi(x, y),$$

приводимо рівняння (1) до виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\zeta, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Це канонічний вид рівняння еліптичного типу.

Приклад:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$A=1; \quad B=-\sin(x); \quad C=\cos^2 x$$

$$B^2 - AC = \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 1 > 0 \text{ Рівняння гіперболічного типу}$$

$$dy - [(-\sin(x))^2 + 1]dx = 0 \quad dy + \sin(x)dx - dx = 0 \quad y - x - \cos(x) = C_1$$

$$dy[-\sin(x) - 1]dx = 0 \quad dy + \sin(x)dx + dx = 0 \quad y + x - \cos(x) = C_2$$

Введемо нові змінні:

$$\xi = y - x - \cos(x)$$

$$\eta = y + x - \cos(x)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -1 + \sin(x) \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 + \sin(x) \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} (-1 + \sin(x))^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} [(-1 + \sin(x))(1 + \sin(x))] + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} (1 + \sin(x))^2 \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial \xi} (\cos(x)) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cos(x)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} (-1 + \sin(x)) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} [(-1 + \sin(x)) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + \sin(x))] + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} (1 + \sin(x))$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} [1 - 2 \sin(x) + \sin^2(x) - \cos^2(x) + 2 \sin(x) - 2 \sin^2(x)] = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} [\sin^2(x) - 1 - 2 \cos^2 - 4 \sin^2(x)] = -[3 + \sin^2(x)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = [1 + 2 \sin(x) + \sin^2(x) - 2 \sin(x) - 2 \sin^2(x) - \cos^2(x)] = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

### 13. РОЗВ'ЯЗКИ

#### 13.1 Розв'язки до розділу 1.

1.

$$xydx + (x + 1)dy = 0$$

$$\frac{x}{x+1}dx = -\frac{dy}{y}$$

$$\left[\frac{x+1-1}{x+1}dx = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx\right]$$

$$x - \ln|x+1| = \ln|y| + c$$

$$y = C \cdot (x+1) \cdot e^{-x}$$

2.

$$\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$$

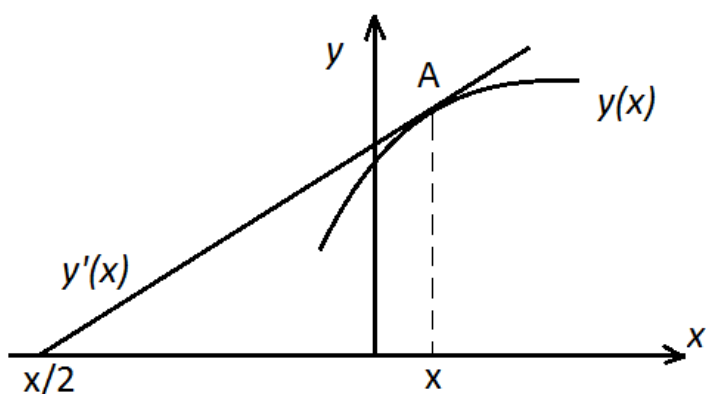
$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{2}d(y^2)}{\sqrt{y^2 + 1}} = |u + 1 = w, du = dw| = \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u + 1}} = \frac{1}{2} \frac{dw}{\sqrt{w}} = \frac{1}{2} w^{\frac{1}{2}} dw$$

$$\frac{1}{2} \int w^{-\frac{1}{2}} dw = \frac{1}{2} \cdot \frac{w^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = w^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\ln|x| = c + \sqrt{y^2 + 1}; \quad x = 0$$

3.



$$y'(x) = \frac{y(x)}{x/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + c$$

$$y = cx^2$$

### 13.2 Розв'язки до розділу 2

$$1. (x + 2y)dx - xdy = 0;$$

$$y = t \cdot x^2; dy = dt \cdot x^2 + 2xtdx;$$

$$(x + 2t \cdot x^2)dx = x(x^2dt + 2xtdx);$$

$$dx(x + 2x^2t - 2x^2t) = x^3dx;$$

$$dx = x^2dt;$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt \rightarrow \int x^{-2}dx = \int dt;$$

$$-x^{-1} = t + C \rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2} + C \rightarrow y + x = Cx^2;$$

$$2. (x - y)dx + (x + y)dy = 0;$$

$$y = tx; \quad dy = xdt + tdx;$$

$$(x - tx)dx + (x + tx)(xdt + tdx) = 0;$$

$$(x - tx)dx + xtdx + t^2x dx + x^2dt + tx^2dt = 0;$$

$$dx(x - tx + tx + t^2x) + dt \cdot x^2(1 + t) = 0;$$

$$dx \cdot x(1 + t^2) = -dt \cdot x^2(1 + t);$$

$$\frac{dx}{x} = -dt \cdot \frac{1 + t}{1 + t^2}$$

$$\ln|x| = -\left(\int \frac{dt}{1+t^2} + \int \frac{tdt}{1+t^2}\right) + C = -\arctgt - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{1+t^2} + C = -\arctgt - \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C =$$

$$-\arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{y^2}{x^2} \right| + C = -\arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln |x^2 + y^2| + \frac{1}{2} \ln(x^2) + C;$$

$$\ln(x^2 + y^2) = C - \arctg\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$3. (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0;$$

$$y = tx^2, \quad dy = x^2 dx + 2xt dx;$$

$$(t^2 x^4 - 2x^3 t)dx + x^4 dt + 2x^3 t dx = 0;$$

$$dx(x^4 t^2 - 2x^3 t + 2x^3 t) + x^4 dt = 0;$$

$$dx \cdot x^4 t^2 + dt \cdot x^4 = 0;$$

$$dx = -\frac{dt}{t^2} \rightarrow x = t^{-1} + C;$$

$$x = \frac{x^2}{y} + C, \quad xy = x^2 + Cy \rightarrow Cy = x(y - x);$$

$$y = 0; \quad Cy = x(y - x);$$

$$4. 2x^3 y' = y(2x^2 - y^2);$$

$$y = z^m, y' = m \cdot z^{(m-1)} \cdot z';$$

$$2x^3 \cdot m \cdot z^{m-1} \cdot z' = z^m (2x^2 - z^{2m});$$

$$3 + m - 1 = 2 + m = 3m, \quad m = 1;$$

$$y = z, \quad y' = z';$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{x} \right)^3, \quad \frac{y}{x} = t, \quad \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx};$$

$$t + x \frac{dt}{dx} = t - \frac{1}{2} (t)^3;$$

$$\frac{2dt}{t^3} = -\frac{dx}{x};$$

$$\frac{2 \cdot t^{-2}}{-2} = -\ln x + C \rightarrow -\frac{x^2}{y^2} = -\ln x + C = -\ln Cx;$$

$$x = \pm y \sqrt{\ln Cx};$$

$$5. y^2 + x^2 y' = xyy';$$

$$y = z^m, y' = m \cdot z^{m-1} \cdot z';$$

$$z^{2m} + x^2 \cdot m \cdot z^{m-1} \cdot z' = x \cdot z^m \cdot m \cdot z^{m-1} \cdot z';$$

$$2m = 2 + m - 1 = 1 + m + m - 1;$$

$$2m = m + 1, \quad m = 1;$$

$$y^2 = y(xy - x^2) \rightarrow y' = \frac{y^2}{x^2 \left( \frac{y}{x} - 1 \right)};$$

$$\frac{y}{x} = t, \quad y' = x \frac{dx}{dt} + t;$$

$$x \frac{dx}{dt} + t = \frac{t^2}{t-1};$$

$$x \frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{t-1} - t = \frac{t^2 - t^2 + t}{t-1} = \frac{t}{t-1};$$

$$\frac{(t-1)}{t} \cdot dt = \frac{dx}{x} \rightarrow t - \ln|t| = \ln|x| + C;$$

$$\frac{y}{x} - \ln \left| \frac{y}{x} \right| = \ln|x| + C \rightarrow \frac{y}{x} - \ln|y| + \ln|x| = \ln|x| + C;$$

$$y = C \cdot e^{y/x};$$

$$6. (x^2 + y^2) y' = 2xy;$$

$$y = z^m, \quad y' = m \cdot z^{m-1} \cdot z';$$

$$2 + m - 1 = 2m + m - 1 = 1 + m, \quad 3m - 1 = 1 + m \rightarrow m = 1;$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad y = tx, \quad y' = x \frac{dt}{dx} + t;$$

$$(x^2 + t^2 x^2) \left( x \frac{dt}{dx} + t \right) = 2x^2 t,$$

$$x^3 \frac{dt}{dx} + t^2 x^3 \frac{dt}{dx} + x^2 t + t^3 x^2 - 2x^2 t = 0,$$

$$\frac{dt}{dx} (1 + t^2) x^3 = x^2 t (1 - t^2) \rightarrow \frac{dt}{dx} x = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2},$$



$$\frac{dx}{x} = \frac{dt(1+t^2)}{t(1-t^2)},$$

$$\frac{(1+t^2)}{t(1-t^2)} = \frac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t} = \frac{A - At^2 + Bt + Bt^2 + Ct - Ct^2}{t(t-1)(t+1)};$$

$$A=1; B=-C; 1=-A+B-C; \quad A=1; B=1; C=-1;$$

$$\ln|x| = \ln|t| - \ln|1-t| - \ln|1+t| + C;$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{y}{x}\right| - \ln\left|1 - \frac{y}{x}\right| - \ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + C;$$

$$\ln|x| = \ln|y| - \ln|x| - \ln|x-y| + \ln|x| - \ln|x+y| + \ln|x| + C;$$

$$\ln|y| - \ln|x-y| - \ln|x+y| + C = 0;$$

$$\ln|y| = \ln|x^2 - y^2| + \ln C;$$

$$x^2 - y^2 = Cy; \quad y = 0.$$

### 13.3 Розв'язки до розділу 3

$$1. \quad xy' - 2y = 2x^4$$

$$y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3;$$

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}; \rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C; \rightarrow y = Cx^2;$$

$$y' = C'x^2 + 2Cx;$$

$$C'x^2 + 2Cx - 2Cx^2\frac{1}{x} = 2x^3;$$

$$C' = 2x; \rightarrow C = x^2 + C_1;$$

$$y = (x^2 + C_1)x^2 = x^4 + Cx^2.$$

$$2. \quad (2x+1)y' = 4x+2y$$

$$y' - \frac{4x}{2x+1} - \frac{2y}{2x+1} = 0; \rightarrow y' - \frac{2y}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x-1}; \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x+1} = \frac{dx}{x+\frac{1}{2}};$$

$$\ln|y| = \ln\left|x + \frac{1}{2}\right| + C; \rightarrow y = C\left(x + \frac{1}{2}\right);$$

$$y' = C' \left(x + \frac{1}{2}\right) + C;$$

$$C' \left(x + \frac{1}{2}\right) + C - \frac{2C\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1};$$

$$\frac{C'(2x+1)}{2} + C - C = \frac{4x}{2x+1}; \rightarrow C' = \frac{8x}{(2x+1)^2};$$

$$2x+1=u; x=\frac{1}{2}(u-1); \frac{du}{2} = dx;$$

$$dC = \frac{dx \cdot 8x}{(2x+1)^2}; \rightarrow dC = \frac{du \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}(u-1)}{u^2} = \frac{2(u-1)du}{u^2};$$

$$dC = \frac{d(u)^2 - 2du}{u^2};$$

$$C = \ln|u^2| + 2u^{-1}; \rightarrow \ln|(2x+1)^2| + \frac{2}{2x+1} + C_1;$$

$$y = C \frac{2x+1}{2} = (2x+1)[\ln(2x+1) + C_1] + 1$$

$$3. \quad y' + y \operatorname{tg}(x) = \sec(x)$$

$$y' + y \operatorname{tg}(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \operatorname{tg}(x)$$

$$\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg}(x) \cdot dx \rightarrow \ln|y| = \ln|\cos(x)| + C \rightarrow y = C \cdot \cos(x)$$

$$y' = C' \cdot \cos(x) - C \cdot \sin(x).$$

$$C' \cdot \cos(x) - C \cdot \sin(x) + C \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{tg}(x) = \sec(x)$$

$$C' \cdot \cos(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \rightarrow C' = \frac{1}{\cos^2(x)}; C = \operatorname{tg}(x) + C'$$

$$y = (\operatorname{tg}(x) + C') \cdot \cos(x) = C \cdot \cos(x) + \sin(x)$$

$$4. \quad (xy + e^x) \cdot dx - x \cdot dy = 0$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = xy + e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = y + \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \rightarrow \ln|y| = x + C \rightarrow Cy = e^x \rightarrow y = e^x \cdot e^c$$

$$y' = e^c \cdot e^x + e^x \cdot e^c \cdot C'$$

$$e^c \cdot e^x + e^x \cdot e^c \cdot C' = e^x \cdot e^c + \frac{e^x}{x} \rightarrow C' = \frac{e^x}{x \cdot e^x \cdot e^c}$$

$$C' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e^c}$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e^c} \rightarrow e^c \cdot dc = \frac{dx}{x}$$

$$e^c = \ln|x| + C_1$$

$$y = e^x [\ln|x| + C]$$

5.

$$x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$$

$$y' + \frac{y}{x} + y^2 = \frac{4}{x^2} \quad - \quad \text{рівняння Ріккати}$$

$$y = \frac{a}{x}$$

$$y' = -\frac{a}{x^2}$$

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x} \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = \frac{4}{x^2} \rightarrow \frac{-a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2} \rightarrow a^2 = 4$$

$$a = 2$$

$$y = \frac{2}{x}$$

$$y = y_1(x) + z \rightarrow y = \frac{2}{x} + z$$

$$y' = -\frac{2}{x} + z'$$

$$-\frac{2}{x} + z' + \frac{2}{x^2} + \frac{z}{x^2} + \frac{4}{x^2} + \frac{4z}{x^2} + z^2 = \frac{4}{x^2}$$

$$z' + \frac{5z}{x} + z^2 = 0$$

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{5z}{xz} = -1$$

$$U = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{U}$$

$$z' = \frac{-U'}{U^2}$$

$$-\frac{U'}{U^2} \cdot \frac{1}{U^2} + \frac{5}{x} U = -1 \rightarrow -U' + \frac{5U}{x} = -1 \rightarrow U' - \frac{5U}{x} = 1$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{5U}{x} \rightarrow \frac{dU}{U} = \frac{5dx}{x} \rightarrow \ln |U| = 5 \ln |x| + C = 5 \ln |x| + \ln C$$

$$\ln |U| = \ln |C \cdot x^5| \rightarrow U = Cx^5$$

$$C'x^5 + 5x^4C - \frac{5Cx^5}{x} = 1 \rightarrow C' = x^{-5}$$

$$C = C_1 - \frac{1}{4x^4}$$

$$U = \left( C_1 - \frac{1}{4x^4} \right) x^5 = C_1 x^5 - \frac{x}{4}$$

$$z = \frac{1}{U} = \frac{1}{C_1 x^5 - \frac{x}{4}} = \frac{4}{4C_1 x^5 - x}$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{4C_1 x^5 - x}$$

### 13.4 Розв'язки до розділу 4

**1.  $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$**

$\frac{\partial}{\partial y} 2xy = 2x, \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) = 2x$  – рівняння в повних диференціальних похідних.

$$dF = F'_x dx + F'_y dy$$

$$F'_x = 2xy, F'_y = (x^2 - y^2).$$

$$F = \int 2xy dx = x^2 y + Y(y),$$

$$[x^2 y + Y(y)]'_y = x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + Y'(y) = x^2 - y^2 \rightarrow Y'(y) = -y^2.$$

$$Y(y) = -\frac{1}{3}y^3 + C,$$

$$F = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \rightarrow y\left(x^2 - \frac{1}{3}y^2\right) = C \rightarrow 3x^2 y - y^3 = C.$$

**2.  $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$**

$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{x}\right] = \frac{1}{x}, \frac{\partial}{\partial x} [y^3 + \ln x] = \frac{1}{x}$  – рівняння в повних диференціальних похідних.

$$F'_x = \frac{y}{x}, F'_y = y^3 + \ln x.$$

$$F = \int \frac{y}{x} dx = y \ln|x| + Y(y),$$

$$[y \ln|x| + Y(y)]'_y = y^3 + \ln x \rightarrow \ln|x| + Y'(y) = y^3 + \ln x \rightarrow Y'(y) = y^3.$$

$$Y(y) = \frac{1}{4}y^4 + C,$$

$$F = y \ln|x| + \frac{1}{4}y^4 \rightarrow y \ln|x| + \frac{1}{4}y^4 = C \rightarrow y^4 + 4y \ln|x| = C.$$

$$3. \quad (1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[1 + y^2 \sin 2x] = 2y \sin 2x, \quad \frac{\partial}{\partial x}[-2y \cos^2 x dy] = 2y * 2 \sin x * \cos x -$$

рівняння в повних диференціальних похідних.

$$F'_x = 1 + y^2 \sin 2x, \quad F'_y = -2y \cos^2 x dy.$$

$$F = \int 1 + y^2 \sin 2x dx = x - y^2 \frac{1}{2} \cos 2x + Y(y),$$

$$[x - y^2 \frac{1}{2} \cos 2x + Y(y)]'_y = -2y \cos^2 x \rightarrow -y \cos 2x + Y'(y) = -2y \cos^2 x$$

$$\rightarrow Y'(y) = y(\cos^2 x - \sin^2 x), -2y \cos^2 x = -y \sin^2 x - y \cos^2 x = -y$$

$$Y(y) = -\frac{y^2}{2} + C,$$

$$x - y^2 \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} = C$$

$$x - y^2 \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x + 1) = C$$

$$x - y^2 \cos^2 x = C.$$

$$4. \quad (x^2 + 2x + y) dx = (x - 3x^2 y) dy$$

$$x^2 dx + 2x dx + y dx - x dy + 3x^2 y dy = 0$$

$$dx \left(1 + \frac{2}{x}\right) + 3y dy - \left(\frac{x dy - y dx}{x^2}\right) = 0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2}$$

$$dF = F'_x + F'_y, F'_x = 1 + \frac{2}{x}, F'_y = 3y.$$

$$F = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = x + 2 \ln|x| + Y(y),$$

$$[x + 2 \ln|x| + Y(y)]'_y = 3y \rightarrow Y'(y) = 3y$$

$$Y(y) = \frac{3}{2}y^2 + C, \quad F = x + 2\ln|x| + \frac{3}{2}y^2, \quad dF - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$x + 2\ln|x| + \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{x} = 0.$$

### 13.5 Розв'язки до розділу 5

1.

$$(y')^2 - y^2 = 0$$

$$(y')^2 = y^2 \rightarrow y' = \pm y$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm y \rightarrow \frac{dy}{y} = \pm dx \rightarrow \ln|y| = \pm x + c$$

$$\boxed{y = c \cdot e^{\pm x}}$$

2.

$$8 \cdot (y')^3 = 27 \cdot y$$

$$(y')^3 = \frac{27}{8} \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot y^{1/3}$$

$$y^{-1/3} \cdot dy = \frac{3}{2} \cdot dx \rightarrow \frac{3 \cdot y^{2/3}}{2} = \frac{3}{2} \cdot x + c$$

$$y^{2/3} = x + c$$

$$\boxed{y^2 = (x + c)^3}$$

— — —

$$24 \cdot (y')^2 = 0$$

$$y' = 0 \rightarrow y = \text{const} \rightarrow y = 0 \text{ особливий розв'язок.}$$

3.

$$y \cdot (y')^3 + x = 1$$

$$(y')^3 = \frac{1-x}{y} \rightarrow y' = \sqrt[3]{\frac{1-x}{y}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{y}}$$

$$y^{1/3} \cdot dy = (1-x)^{1/3} \cdot dx$$

$$1-x = u \quad dx = -du$$

$$\frac{y^{4/3}}{4/3} = -\frac{u^{4/3}}{4/3} + c$$

$$y^{4/3} = -(1-x)^{4/3} + c$$

$$y^{4/3} + (1-x)^{4/3} = c$$

4.

$$(y')^3 + y^2 = y \cdot y' \cdot (y' + 1)$$

$$(y')^3 + y^2 - (y')^2 \cdot y - y \cdot y' = 0$$

$$(y')^2 \cdot [y' - y] - y \cdot [y' - y] = 0$$

$$((y')^2 - y) \cdot (y' - y) = 0$$

$$(y')^2 - y = 0$$

$$y' - y = 0$$

$$y' = y \rightarrow \frac{dy}{dx} = y \quad \frac{dy}{y} = dx \rightarrow \ln|y| = x + c$$

$$\boxed{y = c \cdot e^x}$$

$$(y')^2 - y = 0 \quad (y')^2 = y \quad y' = \pm y^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm y^{1/2} \quad y^{-1/2} \cdot dy = \pm dx$$

$$2 \cdot y^{1/2} = \pm x + c \rightarrow \boxed{4 \cdot y = (c \pm x)^2}$$

- - -

$$3 \cdot (y')^2 = 2 \cdot y' \cdot y + y \quad (y')^2 = y$$

$$3 \cdot y = 2 \cdot y' \cdot y + y \rightarrow 2 \cdot y = 2 \cdot y' \cdot y \rightarrow 1 = y'$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad \boxed{y = x + c}$$

$$3 \cdot (y')^2 = 2 \cdot y' \cdot y + y \quad y' = y$$

$$3 \cdot (y')^2 = 2 \cdot (y')^2 + y \quad y' = y \quad \boxed{y = c \cdot e^x}$$

5.



$$y^2 \cdot ((y')^2 + 1) = 1$$

$$(y')^2 + 1 - \frac{1}{y^2} = 0 \rightarrow (y')^2 = \frac{1}{y^2} - 1 \rightarrow (y')^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

$$y' = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \rightarrow \frac{y \cdot dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx$$

$$\frac{1/2 \cdot d(y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx \rightarrow \frac{d(y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = \pm 2 \cdot dx$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u}} = -\frac{dw}{\sqrt{w}} \rightarrow -w^{-1/2} \cdot dw = \pm 2 \cdot dx$$

$$-2 \cdot w^{1/2} = \pm 2 \cdot x + c$$

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm x + c$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 1$$

- - -

$$2 \cdot y' = 0 \quad y' = 0 \quad y = \text{const} \quad \boxed{y = \pm 1}$$

6.

$$(y')^2 - 2 \cdot x \cdot y = 8 \cdot x^2$$

$$(y')^2 - 2 \cdot x \cdot y + x^2 - x^2 = 8 \cdot x^2$$

$$(y' - x)^2 = 9 \cdot x^2$$

$$y' - x = \pm 3 \cdot x$$

$$y' = 4 \cdot x \rightarrow \frac{dy}{dx} = 4 \cdot x \rightarrow dy = 4 \cdot x \cdot dx \rightarrow y = 2 \cdot x^2 + c$$

$$y' = -2 \cdot x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -2 \cdot x \rightarrow dy = -2 \cdot x \cdot dx \rightarrow y = -x^2 + c$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \rightarrow 2 \cdot y' - 2 \cdot x = 0 \quad y' = x \text{ особливих розв'язків немає.}$$

7.

$$(y')^4 - (y')^2 = y^2$$

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \quad dy = p \cdot dx$$

$$p^4 - p^2 = y^2 \rightarrow p^2 \cdot (p^2 - 1) = y^2 \rightarrow y = \pm p \cdot \sqrt{p^2 - 1}$$

$$2 \cdot y \cdot dy = 4 \cdot p^3 \cdot dp - 2 \cdot p \cdot dp$$

$$y \cdot dy = (2 \cdot p^3 - p) \cdot dp = p \cdot (2 \cdot p^2 - 1) \cdot dp$$

$$\pm p \cdot \sqrt{p^2 - 1} \cdot p \cdot dx = p \cdot (2 \cdot p^2 - 1) \cdot dp$$

$$\pm dx = dp \cdot \frac{2 \cdot p^2 - 1}{p \cdot \sqrt{p^2 - 1}}$$

$$x = \pm \left[ \int \frac{2 \cdot p^2}{p \cdot \sqrt{p^2 - 1}} dp - \int \frac{dp}{p \cdot \sqrt{p^2 - 1}} \right]$$

$$\int \frac{2 \cdot p}{\sqrt{p^2 - 1}} dp = \int \frac{d(p^2)}{\sqrt{p^2 - 1}} dp = \int (u - 1)^{-1/2} du = \int v^{-1/2} dv = 2 \cdot v^{1/2} = 2 \cdot \sqrt{p^2 - 1}$$

$$-\int \frac{dp}{p \cdot \sqrt{p^2 - 1}} = \operatorname{arccosec}(p) = \arcsin \frac{1}{|p|}$$

$$x = \pm \left( 2 \cdot \sqrt{p^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{|p|} \right) + c$$

$$y = \pm 2 \cdot \sqrt{p^2 - 1}$$

$$y' = \text{const} \quad y = 0$$

## 13.6 Розв'язки до розділу 6

1.

$$x^2 \bullet y'' = y^{12}$$

$$y' = z$$

$$x^2 \bullet z' = z^{12}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^{12}}{x^2} \rightarrow \frac{dz}{z^{12}} = \frac{dx}{x^2}$$

$$-z^{-1} = -x^{-1} + C \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} - C = \frac{1 - Cx}{x} \equiv \frac{1 + Cx}{x}$$

$$z = \frac{x}{1+Cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+Cx} \rightarrow dy = \frac{xdx}{1+Cx}$$

$$y = \int \frac{xdx}{1+Cx} = \frac{1}{C} \int \frac{xdx}{\frac{1}{C}+x} = -\frac{1}{C} \int \frac{(\frac{1}{C}-u)du}{u};$$

$$\frac{1}{C} + x = u;$$

$$\frac{1}{C} - u = -x;$$

$$dx = du$$

$$y = -\frac{1}{C} \left[ \int \frac{1}{C} \frac{du}{u} - \int du \right] = -\frac{1}{C^2} \ln|u| + \frac{u}{C} + C_2 = -\frac{1}{C^2} \ln \left| \frac{1}{C} + x \right| + \frac{1}{C} \left( \frac{1}{C} + x \right) + C_2;$$

$$C^2 \bullet y = -\ln|1+Cx| + \ln C + 1 + Cx + C_2 \bullet C^2;$$

$$C^2 \square y = -\ln|1+Cx| + \ln C + 1 + Cx + C_2 \square C^2;$$

$$Cx - C^2 y = \ln|1+Cx| + C_2.$$

$$2y' = 0$$

$$y' = 0$$

$$y = C$$

$$x - 2Cy = \frac{x}{1+Cx};$$

$$x + Cx^2 - 2Cy + 2C^2xy = x;$$

$$\frac{d\Phi}{dC} = 0;$$

$$x^2 - 2y + 2Cxy = 0;$$

$$\underline{2y = x^2 + C.}$$

**2.**

$$y''' + xy'' = 2y';$$

$$y' = z;$$

$$z''' + xz' = 2z;$$

$$p = \frac{dz}{dx} = z';$$

$$p^3 + xp = 2z;$$

$$3p^2 dp + dx \square p + dp \square x = 2dz = 2pdx;$$

$$3p^2 dp + xdp = pdx;$$

$$3dp = \frac{pdx - xdp}{p^2} = d\left(\frac{x}{p}\right);$$

$$3p = \frac{x}{p} + C \rightarrow \underline{x = 3p^2 - Cp};$$

$$dx = (6p - C)dp;$$

$$p^3 + p(3p^2 - Cp) = 2z = 2y' = 2 \frac{dy}{dx};$$

$$p^3 + 3p^3 - Cp^2 = 2 \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dy}{dx} = 2p^3 - \frac{C}{2} p^2;$$

$$dy = (2p^3 - \frac{C}{2} p^2)dx = (2p^3 - \frac{C}{2} p^2)dx = (2p^3 - \frac{C}{2} p^2)(6p - C)dp;$$

$$dy = (12p^4 - 3Cp^3 - 2Cp^3 + \frac{C^2}{2} p^2)dp;$$

$$\underline{y = \frac{12}{5} p^5 - \frac{5}{4} p^4 + \frac{C^2}{6} p^3 + C_2}.$$

$$2y' = 0, y = C.$$

### 3.

$$yy'' + y'^2 = 1;$$

$$d(yy') = y'^2 + yy'';$$

$$d[yy'] = d[x];$$

$$yy' = x + C;$$

$$y' = \frac{x + C}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x + C}{y};$$

$$ydy = (x + C)dx \rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + Cx + C_2;$$

$$\underline{y^2 = x^2 + Cx + C_2.}$$

**4.**

$$yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$yy'' + y'^2 = (yy')';$$

$$yy' = z(x);$$

$$z'(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z(x)}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\ln|z| = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C_1;$$

$$z = C_1(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$yy' = C_1(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$y \frac{dy}{dx} = C_1(x + \sqrt{1+x^2}) \rightarrow ydy = C_1(x + \sqrt{1+x^2})dx;$$

$$\frac{y^2}{2} = C \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|) \right] + C_2;$$

$$\underline{y^2 = C_1(x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|) + C_2}$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int x \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|$$

$$a) \sqrt{1+x^2} = u \quad \begin{array}{l} dx = dv \\ x = v \end{array}$$

$$du = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2xdx;$$

$$b) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \sqrt{1+x^2} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \int \sqrt{1+x^2} dx - \ln|x + \sqrt{1+x^2}|;$$

$$2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|;$$

**5.**

$$4x^2y^3y'' = x^2 - y^4;$$

$$F(x, y, y', y'') = 4x^2y^3y'' - x^2 + y^4 = 0;$$

$$x \rightarrow tx;$$

$$y \rightarrow t^m y;$$

$$y' \rightarrow t^{m-1} y';$$

$$y'' \rightarrow t^{m-2} y'';$$

$$4x^2 t^2 t^{3m} y^3 t^{m-2} y'' - t^2 x^2 + t^{4m} y^4 = 4x^2 y^3 y'' t^{4m} - t^2 x^2 + t^{4m} y^4;$$

$$\left[ 4x^2 y^3 y'' t^{2+3m+m-2} = 4x^2 y^3 y'' t^{4m} \right];$$

$$t^{4m} 4x^2 y^3 y'' - t^2 x^2 + t^{4m} y^4 = t^\alpha (4x^2 y^3 y'' - x^2 + y^4);$$

$$4m = 2$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 2$$

Рівняння узагальнено однорідне

$$x = e^t$$

$$y = e^{\frac{t}{2}} u(t);$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{t}{2}} \frac{u(t)}{2} + e^{\frac{t}{2}} u'(t)}{e^t} = e^{\frac{t}{2}} \left( \frac{u(t)}{2} + u'(t) \right);$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{t}{2}} \left( \frac{u}{2} + u' \right) \right) = e^{-\frac{3t}{2}} \left( u'' - \frac{u}{4} \right);$$

$$4e^{2t} e^{\frac{3t}{2}} u(t)^3 e^{-\frac{3t}{2}} \left( u'' - \frac{u}{4} \right) - e^{2t} + e^{2t} u(t)^4 = 0;$$

$$4u^3 \left( u'' - \frac{u}{4} \right) e^{2t} + e^{2t} u^4 = e^{2t};$$

$$4 \left[ u^3 u'' \right] - \frac{4u^4}{4} + u^4 = 1;$$

$$4u^3 u'' = 1;$$

$$u' = p(u)$$

$$u'' = p' \cdot p;$$

$$4u^3 p \frac{dp}{du} = 1 \rightarrow 4p dp = \frac{du}{u^3};$$

$$2p^2 = \frac{u^{-2}}{-2} + C_1 \rightarrow 4p^2 + \frac{1}{u^2} = C_1 \rightarrow p = \pm \sqrt{C_1 - \frac{1}{4u^2}};$$

$$u' = \pm \sqrt{C_1 - \frac{1}{4u^2}} \rightarrow \frac{du}{dt} = \pm \sqrt{C_1 - \frac{1}{4u^2}} \rightarrow \frac{du}{\sqrt{C_1 - \frac{1}{4u^2}}} = \pm dt;$$

$$\frac{2udu}{\sqrt{4C_1u^2 - 1}} = \pm dt;$$

$$\left[ \frac{d(u^2)}{2\sqrt{C_1}\sqrt{u^2 - \frac{1}{4C_1}}} = \frac{1}{2\sqrt{C_1}} \cdot \frac{dv}{(v - \frac{1}{4C_1})^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$v - \frac{1}{4C_1} = w, dv = dw \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{C_1}} \frac{dw}{w^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{C_1}} w^{-\frac{1}{2}} dw;$$

$$\int w^{-\frac{1}{2}} dw = 2w^{\frac{1}{2}} \rightarrow 2(v - \frac{1}{4C_1})^{\frac{1}{2}} \rightarrow 2(u^2 - \frac{1}{4C_1})^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{2\sqrt{C_1}} 2(u^2 - \frac{1}{4C_1})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \sqrt{u^2 - \frac{1}{4C_1}} = \sqrt{4C_1u^2 - 1} \frac{1}{\sqrt{C_1}} \frac{1}{2\sqrt{C_1}}]$$

$$\frac{1}{2C_1} \sqrt{4C_1u^2 - 1} = \pm t + C_2;$$

$$\frac{1}{4C_1^2} (4C_1u^2 - 1) = (t + C_2)^2;$$

$$u^2 = C_1(t + C_2)^2 + \frac{1}{4C_1};$$

$$x = e^t, y = e^t (C_1(t + C_2)^2 + \frac{1}{4C_1}).$$


---

### 13.7 Розв'язки до розділу 7

$$1. y'' + y' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{9}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = -2;$$

$$\lambda_2 = 1;$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$3. \quad y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0;$$

$$\lambda_2 = 2;$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}$$

$$4. \quad y'' - 8y = 0$$

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lambda^3 - 2^3 = 0 \rightarrow \lambda^3 - 2^3 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4)$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{3}; \quad \lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}; \quad \lambda_3 = 2;$$

$$y = C_3 e^{2x} + e^{-x}(\cos \sqrt{3}x + \sin \sqrt{3}x)$$

$$5. \quad y'' + 2y' + 10y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 10} = -1 \pm i\sqrt{9}$$

$$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{9}; \quad \lambda_2 = -1 - i\sqrt{9};$$

$$y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{9}x + C_2 \sin \sqrt{9}x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

$$6. \quad y^{IV} + 64y = 0$$

$$\lambda^6 + 64 = 0$$



$$\lambda_k = \sqrt[6]{-64} = 2 \cdot e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{6}}, k = 0, 1, 2, 3 \dots 5$$

$$\lambda_1 = 2 \cdot e^{\frac{i\pi}{6}} = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot e^{\frac{i \cdot 3\pi}{6}} = 2(0 + i) = 2i$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot e^{\frac{i \cdot 5\pi}{6}} = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$\lambda_4 = 2 \cdot e^{\frac{i \cdot 7\pi}{6}} = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} - i$$

$$\lambda_5 = 2 \cdot e^{\frac{i \cdot 9\pi}{6}} = 2(0 - i) = -2i$$

$$\lambda_6 = 2 \cdot e^{\frac{i \cdot 11\pi}{6}} = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - i$$

$$y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} + (C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix}) e^{\sqrt{3}x} + e^{-\sqrt{3}x} (C_5 e^{ix} + C_6 e^{-ix})$$

$$\cos \beta x + i \sin \beta x = e^{i\beta x}$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + (C_3 \cos x + C_4 \sin x) e^{\sqrt{3}x} + e^{-\sqrt{3}x} (\cos x + C_6 \sin x)$$

$$7. \quad y'' - y = 2e^x - x^2$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1;$$

$$\lambda_2 = 1;$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$y_1 = a_0 \cdot x \cdot e^x$$

$$y_2 = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

$$y'' - y = 2e^x$$

$$y'' - y = -x^2$$

*Частковий розв'язок*

$$y_1 = a_0 \cdot x \cdot e^x$$

$$y_1' = a_0 \cdot e^x + a_0 \cdot x \cdot e^x$$

$$y_1'' = a_0 \cdot e^x + a_0 \cdot e^x + a_0 \cdot x \cdot e^x$$

$$2a_0 \cdot e^x + a_0 \cdot x \cdot e^x - a_0 \cdot x \cdot e^x = 2e^x$$

$$2a_0 = 2$$

$$a_0 = 1$$

$$y_2 = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

$$y_2' = 2xb_0 + b_1$$

$$y_2'' = 2b_0$$

$$2b_0 - b_2 - b_1 x - b_0 x^2 = -x^2$$

$$-b_0 x^2 = -x^2 \rightarrow b_0 = 1$$

$$-b_1 x = 0 \rightarrow b_1 = 0$$

$$2b_0 - b_2 = 0 \rightarrow b_2 = 2$$

*Частковий розв'язок*

$$\tilde{y} = y_1 + y_2 = x \cdot e^x + x^2 + 2$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x \cdot e^x + x^2 + 2$$

$$7. y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 1;$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix}$$

$$\gamma_1 = i;$$

$$\gamma_2 = -i;$$

$$\gamma \neq \lambda_i$$

$$\tilde{y} = y_1 + y_2$$

$$y_1 = a_0 \cdot e^{ix}$$

$$y_2 = b_0 e^{-ix}$$

$$\tilde{y} = a_0 \cdot e^{ix} + b_0 e^{-ix}$$

$$\tilde{y}' = ia_0 e^{ix} - ib_0 e^{-ix}$$

$$\tilde{y}'' = -a_0 \cdot e^{ix} - b_0 e^{-ix}$$

$$-a_0 \cdot e^{ix} - b_0 e^{-ix} - 3ia_0 \cdot e^{ix} - 3ib_0 e^{-ix} + 2a_0 \cdot e^{ix} + 2b_0 e^{-ix} = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix}$$

$$e^{ix}[-a_0 - 3ia_0 + 2a_0] = \frac{1}{2i} e^{ix} \quad [a_0 - 3ia_0] = \frac{1}{2i} \rightarrow a_0(1 - 3i) = \frac{1}{2i}$$

$$e^{-ix}[-b_0 - 3ib_0 + 2b_0] = -\frac{1}{2i} e^{-ix} \quad [b_0 - 3ib_0] = -\frac{1}{2i} \rightarrow b_0(1 - 3i) = -\frac{1}{2i}$$

$$a_0 = \frac{1}{2i(1-3i)} = \frac{1}{2i+6} = \frac{2i-6}{-4-36} = \frac{3}{20} - \frac{i}{20}$$

$$b_0 = -\frac{1}{2i(1-3i)} = -\frac{1}{2i+6} = \frac{6-2i}{-40} = -\frac{3}{20} + \frac{i}{20}$$

$$\tilde{y} = a_0 \cdot e^{ix} + b_0 e^{-ix} = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$$

### 13.8 Розв'язки до розділу 8

I. Визначить лінійну залежність функцій

$$1. \quad y_1 = x + 2; \quad y_2 = x - 2$$

Якщо функції лінійно залежні, то найдуться такі  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , одночасно не рівні нулю, щоб виконати тотожність відносно  $x$ :

$$\alpha_1(x + 2) + \alpha_2(x - 2) \equiv 0$$

$$\alpha_1 x + 2\alpha_1 + \alpha_2 x - 2\alpha_2 \equiv 0$$

$$x(\alpha_1 + \alpha_2) \equiv 0$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2) \equiv 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 \equiv 0 \quad \alpha_2 = 0$$

$y_1$  і  $y_2$  лінійно незалежні.

$$2. \quad y_1 = x^2 - x + 3, \quad y_2 = 2x^2 + x, \quad y_3 = 2x - 4$$

$$\alpha_1(x^2 - x + 3) + \alpha_2(2x^2 + x) + \alpha_3(2x - 4) \equiv 0$$

$$x^2(\alpha_1 + 2\alpha_2) \equiv 0 \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 \equiv 0$$

$$x(-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) \equiv 0 \quad -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \equiv 0$$

$$3\alpha_1 - 4\alpha_3 \equiv 0 \quad 3\alpha_1 - 4\alpha_3 \equiv 0$$

$$\alpha_1 = 4 \quad \alpha_2 = 3 \quad \alpha_3 = -2$$

$y_1; y_2; y_3$  - лінійно залежна.

$$3. \quad y_1 = 6x + 9; \quad y_2 = 8x + 12$$

$$\alpha_1(6x + 9) + \alpha_2(8x + 12) \equiv 0$$

$$\begin{array}{l} x(6\alpha_1 + 8\alpha_2) \equiv 0 \\ 9\alpha_1 + 12\alpha_2 \equiv 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x(3\alpha_1 + 4\alpha_2) \equiv 0 \\ 3(3\alpha_1 + 4\alpha_2) \equiv 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 3\alpha_1 = -4\alpha_2 \\ \alpha_1 = -4; \alpha_2 = 3 \end{array}$$

$y_1; y_2$  - лінійно залежні

II. Розв'язати рівняння

$$4. \quad (1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x$$

$$y = x \cdot z(x)$$

$$z' = u$$

$$y' = z + x \cdot z' = z + xu$$

$$y'' = z' + z' + xz'' = 2z' + xz'' = 2u + xz'' = 2u + xu'$$

$$(1 + x^2)(2u + xu') - 2x(z + xu) + 2xz = 0$$

$$x(1 + x^2) \cdot u' + (1 + x^2)2u - 2xz - 2x^2u + 2xz = 0$$

$$x(1 + x^2)u' + 2u = 0$$

$$x(1 + x^2) \cdot \frac{du}{dx} = -2u \quad \rightarrow \quad \frac{x(1 + x^2)}{dx} = -\frac{2u}{du} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{x(1 + x^2)} = -\frac{du}{2u}$$

$$\left[ \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)} = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x^2(A + B) = 0 \\ xC = 0 \\ A = 1 \quad B = -1 \end{array} \right]$$

$$\int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2 + 1)} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln|u| + \ln C$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2 + 1} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| = -\frac{1}{2} \ln|u| + \ln C$$

$$\frac{x}{(x^2 + 1)^{1/2}} = \frac{C_1}{u^{1/2}} \quad u = C_1 \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right) \quad \rightarrow \quad z' = C_1 \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)$$

$$\frac{dz}{dx} = C_1 \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right) \quad \rightarrow \quad z = \int C_1 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = C_1 x - \frac{C_1}{x} + C_2$$

$$\underline{y = C_1 x^2 - C_1 + C_2 x}$$

$$5. \quad xy'' + y' = 0$$

Рівняння Ейлера

$$x'y'' + x^0 y' = 0$$

$$n = 1 \quad x^n y^n + x^{n-1} y^{n-1} \dots$$

$$y = x^k$$

$$y' = kx^{k-1}$$

$$y'' = k(k-1)x^{k-1}$$

$$xk(k-1)x^{k-2} + kx^{k-1} = 0 \rightarrow x^{k-1}k(k-1) + kx^{k-1} = 0$$

$$x^{k-1}[k(k-1) + k] = 0 \rightarrow k^2 - k + k = 0 \quad k_{11} = 0 \quad k_2 = 0$$

$$y_1 = x^0 = 1 \quad y_2 = x^0 \ln x = \ln x$$

$$\underline{y = C_1 + C_2 \ln x}$$

$$6. \quad (x+1)^3 y''' - 3(x+1)^2 y'' + 4(x+1)y' - 4y = 0$$

$$(x+1) \equiv z \quad z^3 y''' - 3z^2 y'' \dots \quad \text{Рівняння Ейлера}$$

$$y = (x+1)^k; \quad y' = k(x+1)^{k-1}; \quad y'' = k(k-1)(x+1)^{k-2};$$

$$y''' = k(k-1)(k-2)(x+1)^{k-3}$$

$$(x+1)^3 k(k-1)(k-2)(x+1)^{k-3} - 3(x+1)^2 k(k-1)(x+1)^{k-2} + 4(x+1)k(x+1)^{k-1} - 4(x+1)^k = 0$$

$$k(k-1)(k-2)(x+1)^k - 3(x+1)^k k(k-1) + 4(x+1)^k k - 4(x+1)^k = 0$$

$$(k-1)[k(k-2) - 3k + 4] = 0 \rightarrow k^2 - 2k - 3k + 4 = 0 \rightarrow k^2 - 5k + 4 = 0$$

$$k_1 = 1$$

$$k_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - 4} = 2,5 \pm 1,5$$

$$k_2 = 1$$

$$k_3 = 4$$

$$y_1 = (x+1); \quad y_2 = (x+1) \ln(x+1); \quad y_3 = (x+1)^4$$

$$\underline{y = C_1(x+1) + C_2(x+1) \ln(x+1) + C_3(x+1)^4}$$

$$7. \quad xy'' + 2y' + xy = 0; \quad y_1(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0)$$

По формулі Остроградського-Ліувілля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3' & y_4' \end{vmatrix} = C_1 \exp \left( - \int P_1(x) dx \right), \quad \text{де } P_1(x) = \frac{a_1}{a_0} = \frac{2}{x}$$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C_1 \exp \left( - \int \frac{2}{x} dx \right) = C_1 \exp(-2 \ln|x|) = \frac{C_1}{x^2}$$

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{C_1}{x^2 y_1^2} \rightarrow d \left( \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{C_1}{x^2 y_1^2}$$

$$y_2 = C_1 y_1 \int \frac{dx}{x^2 y_1^2} + C_2 y_1 = C_1 y_1 \int \frac{dx}{x^2 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2} + C_2 y_1$$

$$y_2 = -C_1 y_1 \operatorname{ctg} x + C_2 y_1$$

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_1 \frac{\sin x}{x} - \alpha_2 C_1 \frac{\sin x \cos x}{x \sin x} + \alpha_2 C_2 \frac{\sin x}{x}$$

$$\underline{y = k \frac{\sin x}{x} + M \frac{\cos x}{x}}$$

$$8. \quad x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = xz(x)$$

$$z' = u(x)$$

$$y' = z(x) + xz'(x) = z + xu$$

$$y'' = z' + z' + xz' = 2z' + xz'' = 2u + xz'' = 2u + xu'$$

$$y'' = 2z'' + z'' + xz''' = 3z'' + xz''' = 3u' + xu''$$

$$x^2(2x-1)(3u' + xu'') + (4x-3)x(2u + xu') - 2x(z + xu) + 2xz = 0$$

$$u''x^3(2x-1) + u'[3x^2(2x-1) + (4x-3)x^2] + u[2(4x-3)x - 2x^2] = 0$$

$$u''x^3(2x-1) + u'[(5x-3) \cdot 2x^2] + u \cdot 6x(x-1) = 0$$

$$u''x^2(2x-1) + u'(5x-3) \cdot 2x + u \cdot 6(x-1) = 0 \quad (1)$$

$$y_2(x) = xz_2(x) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x} = xz_2(x) \quad \rightarrow \quad z_2(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$z_2'(x) = u_2$$

$$z_2'(x) = u_2 = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$u_2(x) = -\frac{2}{x^3} - \text{часткове розв'язання}$$

$$u = \frac{W(x)}{x^3} \quad W'(x) = \omega(x) \quad \text{Підставляємо в (1)}$$

$$u' = \frac{W'x^3 - W \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{xW' - 3W}{x^4} = \frac{x \cdot \omega - 3W}{x^4}$$

$$u'' = \frac{x^4(W' + xW'' - 3W') - (x \cdot W' - 3W) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{x^2 \cdot \omega' - 6x\omega + 12W}{x^5}$$

$$u'' = \frac{x^2 \cdot W'' - 6xW' + 12W}{x^5} = \frac{x^2 \cdot \omega' - 6x\omega + 12W}{x^5}$$

$$x^2(2x-1) \cdot \frac{x \cdot \omega' - 6x\omega + 12W}{x^5}$$

+

$$(10x^2 - 6x) \cdot \frac{x\omega - 3W}{x^4}$$

+

$$6(x-1) \cdot \frac{W}{x^3} = 0$$



$$1. \quad \omega' \cdot \frac{x^2(2x-1)}{x^5} \cdot x^2 = \omega' \cdot \frac{(2x-1)}{x}$$

$$\omega \cdot \left[ -\frac{x^2(2x-1)}{x^5} \cdot 6x + \frac{10x^2-6x}{x^3} \right] = \omega \left[ \frac{10x-6}{x^2} - \frac{(2x-1) \cdot 6}{x^2} \right] = \omega \left[ \frac{10x-6-12x+6}{x^2} \right] =$$

$$2. \quad \omega \left[ \frac{-2x}{x^2} \right] = -\omega \frac{2x}{x^2}$$

$$3. \quad W \left[ \frac{x^2(2x-1)}{x^5} \cdot 12 - \frac{10x-6}{x^3} \cdot 3 + 6 \frac{x-1}{x^3} \right] = W \left[ \frac{24x-12-30x+18+6x-6}{x^3} \right] = W \frac{0}{x^3}$$

$$\underline{(2x-1) \cdot \omega' - 2\omega = 0} \quad \rightarrow \quad \omega' = \omega \cdot \frac{2}{(2x-1)}$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{2}{2x-1} dx$$

$$\ln \omega = \ln(2x-1) + \ln C_1$$

$$\omega = C_1(2x-1)$$

$$W' = C_1(2x-1)$$

$$W(x) = C_1 \cdot x^2 - C_1 x + C_2 = C_1(x^2 - x) + C_2$$

$$u(x) = C_1 \left[ \frac{x^2 - x}{x^3} \right] + \frac{C_2}{x^3}$$

$$z'(x) = C_1 \left[ \frac{x^2 - x}{x^3} \right] + \frac{C_2}{x^3}$$

$$z(x) = C_1 \left[ \ln x + \frac{1}{x} \right] - \frac{C_2}{2x^2} + C_3$$

$$\underline{y = C_1(1 + x \ln x) + \frac{C_2}{x} + C_3 x.}$$

13.9 Розв'язки до розділу 9

$$1. \quad y'' - y' = 0; \quad y(0) = -1, \quad y'(1) - y(1) = 2.$$

$$\alpha^2 - \alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 1$$

$$y = C_1 + C_2 e^x \quad \text{загальний розв'язок однорідного рівняння}$$

$$x = 0 \quad -1 = C_1 + C_2$$

$$C_2 e^1 - C_1 - C_2 e^1 = 2$$

$$C_1 = -2$$

$$C_2 = 1$$

$$y = -2 + e^x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$2. \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y(x) = 0(x) \text{ при } x \rightarrow 0,$$

$$y(1) = 3$$

Рівняння Ейлера. Окремий випадок  $y = x^\lambda$

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}$$

$$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

$$\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1,5 \pm \sqrt{2,25 - 2} = 1,5 \pm 0,5$$

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 1$$

$$y = C_1 x + C_2 x^2 \quad \text{загальний розв'язок.}$$

$$1) \quad y = x(C_1 + C_2 x) \quad x \rightarrow 0 \quad C_1 = 0$$

$$2) \quad y = C_2 x^2 \quad 3 = C_2 \cdot 1 \quad C_2 = 3$$

$$y = 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Побудувати функцію Гріна для наступних крайових задач:

$$3. \quad y'' = f(x); \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Для функції Гріна:

$$G''_{xx} = 0; \quad G(0, s) = G(1, s) = 0, \quad (0 \leq x \leq 1; x \neq s)$$

$$G'_x|_{x=s+0} = G'_x|_{x=s-0} + 1.$$

$$G''_{xx} = 0 \rightarrow G'_x(x, s) = \begin{cases} C_1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq s \\ C_2, & \text{якщо } s < x \leq 1 \end{cases}.$$

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 x + C_3, & \text{якщо } 0 \leq x \leq s \\ C_2 x + C_4, & \text{якщо } s < x \leq 1 \end{cases}$$

$$C_1 s + C_3 = C_2 s + C_4 \quad (G \text{ неперервна})$$

$$x=0 \quad C_1 0 + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$C_2 + C_4 = 0$$

$$C_2 = C_1 + 1$$

$$\begin{cases} C_1 s + 0 = C_2 s + C_4 & (C_1 - C_2)s = C_4 \\ C_2 + C_4 = 0 & \rightarrow C_2 - C_1 = 1 \\ C_2 = C_1 + 1 & C_4 = -s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= -C_4 & C_2 &= s \\ & & C_1 &= s - 1 \end{aligned}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} (s-1)x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq s \\ s(x-1), & \text{якщо } s < x \leq 1 \end{cases}$$

$$4. y'' + y = f(x); \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi)$$

$$G''_{xx} + G = 0 \quad x \neq s$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_1 = +i, \lambda_2 = -i$$

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \sin x + C_2 \cos x, & \text{якщо } 0 \leq x < s \\ C_3 \sin x + C_4 \cos x, & \text{якщо } s < x \leq \pi \end{cases}$$

$$C_1 0 + C_2 = C_3 0 - C_4 \rightarrow C_2 = -C_4$$

$$C_1 - C_2 0 = -C_3 - 0 \rightarrow C_1 = -C_3$$

$G(x, s)$  при  $x = s$  неперервна

$$C_1 \sin s + C_2 \cos s = C_3 \sin s + C_4 \cos s$$

$$-C_1 \cos s + C_2 \sin s + C_3 \cos s - C_4 \sin s = 1$$

стрибок  $G'_x$  при  $x = s$

$$\begin{aligned} \sin s(C_1 - C_3) &= \cos s(C_4 - C_2) \\ \cos s(C_3 - C_1) + \sin(C_2 - C_4) &= 1 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} C_2 &= -C_4 = \frac{1}{2} \sin s \\ C_1 &= -C_3 = -\frac{1}{2} \cos s \end{aligned}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cos s \sin x + \frac{1}{2} \sin s \cos x = \frac{1}{2} \sin(s-x), & \text{якщо } 0 \leq x \leq s \\ \frac{1}{2} \cos s \sin x - \frac{1}{2} \sin s \cos x = \frac{1}{2} \sin(x-s), & \text{якщо } s \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$5. \quad x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = f(x); \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0$$

$$x^3 G'' + 3x^2 G' + xG = 0$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{C_1}{x} + \frac{C_2 \ln x}{x}, & \text{якщо } 1 \leq x < s \\ \frac{C_3}{x} + \frac{C_4 \ln x}{x}, & \text{якщо } s < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\frac{C_1}{1} + \frac{C_2 \cdot 0}{1} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\frac{C_3}{2} + C_4 \frac{\ln 2}{2} - 2 \frac{C_3}{4} - 2C_4 \frac{1 - \ln 2}{4} = 0 \quad C_4 = 0$$

$$\frac{C_2 \ln s}{s} = \frac{C_3}{s} \quad C_2 \ln s = C_3$$

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{xs}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq s \\ -\frac{\ln s}{xs}, & \text{якщо } s \leq x \leq 2 \end{cases}$$

### 13.10 Розв'язки до розділу 10

$$1. \quad \dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 4y$$

$$y = \dot{x} - 2x \rightarrow (\dot{x} - 2x)' = 3x + 4(\dot{x} - 2x)$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} = 3x + 4\dot{x} - 8x$$

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$$

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \cdot 5 - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{5t}$$

$$y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$$

$$2. \quad \dot{x} + y = t^2 + 6t + 1$$

$$\dot{y} - x = -3t^2 + 3t + 1$$

$$y = t^2 + 6t + 1 - \dot{x} \rightarrow \dot{y} = 2t + 6 - \ddot{x}$$

$$2t + 6 - \ddot{x} - x = -3t^2 + 3t + 1$$

$$\ddot{x} + x = 3t^2 - t + 5$$

$$\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\alpha_1 = i; \quad \alpha_2 = -i;$$

$$x = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t + \bar{x}(t)$$

$$\bar{x} = at^2 + bt + c$$

$$\dot{\bar{x}} = 2at + b$$

$$\ddot{\bar{x}} = 2a$$

$$2a + at^2 + bt + c = 3t^2 - t + 5$$

$$a = 3, \quad b = -1, \quad c = -1$$

$$\bar{x} = 3t^2 - t - 1$$

$$x = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t + 3t^2 - t - 1$$

$$y = C_1 \cdot \sin t - C_2 \cos t + t^2 + 2$$

$$3. \quad x = -x + y + z$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = x + y - z$$

$$\ddot{x} = -\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = x - y - z + x - y + z + x + y - z = 3x - y - z = 3x - x - \dot{x}$$

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

$$\alpha_{112} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 1$$

$$\underline{x = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2t}}$$

$$\dot{x} - \dot{y} = -2x + 2y$$

$$\dot{y} + 2y = \dot{x} + 2x = 2C_1 \cdot e^t + 2C_2 \cdot e^{-2t} + C_1 \cdot e^t - 2C_2 \cdot e^{-2t} = 3C_1 \cdot e^t$$

$$\alpha + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -2$$

$$y = C_3 \cdot e^{-2t} + \bar{y}(t)$$

$$\bar{y} = a \cdot e^t \quad \frac{1}{y} = a \cdot e^t \quad \rightarrow \quad a \cdot e^t + 2a \cdot e^t = 3C_1 \cdot e^t$$

$$3a = 3C_1 \quad \rightarrow \quad a = C_1$$

$$z = \dot{x} + x - y = C_1 \cdot e^t - 2C_2 \cdot e^{-2t} + C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2t} - C_3 \cdot e^{-2t} - C_1 \cdot e^t$$

$$\underline{z = C_1 \cdot e^t - C_2 \cdot e^{-2t} - C_3 \cdot e^{-2t} = C_1 \cdot e^t - e^{-2t}(C_2 + C_3)}$$

$$4. \quad \dot{x} = y - z, \quad \dot{y} = x + y, \quad \dot{z} = x + z$$

$$\ddot{x} = \dot{y} - \dot{z} = x + y - x - z + y - z + \dot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \dot{x}$$

$$\alpha^2 - \alpha + 0 \quad \rightarrow \quad \alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1$$

$$\underline{x = C_1 + C_2 \cdot e^t}$$

$$\dot{z} = z + C_1 + C_2 \cdot e^t \quad \rightarrow \quad \dot{z} - z = C_1 + C_2 \cdot e^t$$

$$z = C_3 \cdot e^t + \bar{z}(t)$$

$$z(t) = (a + bt)e^t + d \quad \dot{z} = e^t(a + bt) + e^t \cdot b$$

$$e^t(a + bt) + e^t \cdot b - e^t(a + bt) - d = C_1 + C_2 \cdot e^t \quad b = C_2$$

$$d = -C_1$$

$$\underline{z = C_3 \cdot e^t + e^t \cdot C_2 t - C_1 = e^t(C_3 + C_2 t) - C_1}$$

Застосовуючи метод Ейлера, розв'язати наступні системи рівнянь

$$5. \dot{x} = x - y; \quad \dot{y} = y - 4x$$

$$x = a \cdot e^{\alpha t}; \quad y = B \cdot e^{\alpha t}$$

$$A\alpha = A - B; \quad B\alpha = B - 4A$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ 4 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\alpha - 1)^2 - 4 = 0 \rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4 = 0 \quad \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2 \quad \alpha_2 = -1 \quad \alpha_1 = 3$$

$$x_1 = A_1 \cdot e^{3t}, \quad x_2 = A_2 \cdot e^{-t}, \quad y_1 = B_1 \cdot e^{3t}, \quad y_2 = B_2 \cdot e^{-t}$$

$$A_1 \cdot \alpha_1 = A_1 - B_1 \quad 3A_1 = A_1 - B_1 \rightarrow +2A_1 = -B_1 \quad B_1 = -2A_1$$

$$\alpha_2 \cdot A_2 = A_2 - B_2 \quad -A_2 = A_2 - B_2 \rightarrow -2A_2 = -B_2 \quad B_2 = 2A_2$$

$$A_1 = A_2 = 1 \quad B_1 = -2, \quad B_2 = 2$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -2e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X(t) \cdot C = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -2e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} & C_2 e^{-t} \\ -2C_1 e^{3t} & 2C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

$$\underline{y = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}}$$

$$6. \dot{x} = x - y + z, \quad \dot{y} = x + y - z, \quad \dot{z} = 2x - y$$

$$x = A \cdot e^{\alpha t}, \quad y = B \cdot e^{\alpha t}, \quad z = C \cdot e^{\alpha t}$$

$$\alpha A = A - B + C = A(\alpha - 1) + B - C = 0,$$

$$\alpha B = A + B - C = -A + (\alpha - 1)B + C = 0,$$

$$\alpha C = 2A - B = -2A + B + \alpha C = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & 1 & -1 \\ -1 & \alpha - 1 & 1 \\ -2 & 1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1) + 1 - 1 - (1 \cdot (-1)\alpha) - (\alpha - 1) \cdot 1 - (-1)(\alpha - 1)(-1) = 0$$

$$\alpha(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1) + 1 + \alpha - (\alpha - 1) - (\alpha - 1) = 0$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha - \alpha + 1 = 0 \quad \alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$$

$$\alpha(\alpha^2 - 1) - 2(\alpha^2 - 1) = 0 \quad (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 2) = 0$$

$$(\alpha - 2)(\alpha - 1)(\alpha + 1) = 0$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = -1$$

$$x_1 = A_1 e^t, \quad x_2 = A_2 e^{2t}, \quad x_3 = A_3 e^{-t}$$

$$y_1 = B_1 e^t, \quad y_2 = B_2 e^{2t}, \quad y_3 = B_3 e^{-t}$$

$$z_1 = C_1 e^t, \quad z_2 = C_2 e^{2t}, \quad z_3 = C_3 e^{-t}$$

$$A_1 = A_1 - B_1 + C_1 \quad B_1 = C_1 = A_1$$

$$2A_2 = A_2 - B_2 + C_2 \quad 2A_2 = 2A_2 + 2B_2 \quad B_2 = 0$$

$$2B_2 = A_2 + B_2 - C_2 \quad A_2 = C_2$$

$$2C_2 = 2A_2 - B_2$$

$$-A_3 = A_3 - B_3 + C_3 \quad -(A_3 + B_3) = 2A_3 \quad \rightarrow \quad -B_3 = 3A_3 \quad \rightarrow \quad B_3 = -3A_3$$

$$-B_3 = A_3 + B_3 - C_3 \quad -C_3 = 2A_3 + 3A_3 \quad C_3 = -5A_3$$

$$-C_3 = 2A_3 - B_3$$

$$A_1 = B_1 = C_1 = 1 \quad C_2 = A_2 = 1 \quad B_2 = 0 \quad A_3 = 1 \quad B_3 = -3 \quad C_3 = -5$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-t} \\ e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t & C_2 e^{2t} & C_3 e^{-t} \\ C_1 e^t & & C_3 e^{-t} \\ C_1 e^t & C_2 e^{2t} & C_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$$

$$y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t}$$

$$\underline{z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}}$$

$$7. \quad x = -2x + y - 2z, \quad y = x - 2y + 2x, \quad z = 3x - 3y + 5z$$



$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2-\alpha & 1 & -2 \\ 1 & -2-\alpha & 2 \\ 3 & -3 & 5-\alpha \end{vmatrix}$$

$$(-2-\alpha)^2(5-\alpha) + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \cdot (-3) - 1 \cdot 1(5-\alpha) - (2+\alpha) \cdot 6 - (-2)(-1)(2+\alpha) \cdot 3 = 0$$

$$(4+4\alpha+\alpha^2)(5-\alpha) + 6 + 6 - (5-\alpha) - 6(2+\alpha) - 6(2+\alpha) = 0$$

$$20 + 20\alpha + 5\alpha^2 - 4\alpha - 4\alpha^2 - \alpha^3 + 12 - 5 + \alpha - 24 - 12\alpha = 0$$

$$-\alpha^3 + \alpha^2 + 5\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha^3 - \alpha^2 - 5\alpha - 3 = 0$$

$$\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 3\alpha - 3 = -3(\alpha+1) + \alpha(\alpha^2 - \alpha - 2) = 0$$

$$\alpha(\alpha-2)(\alpha+1) - 3(\alpha+1) = (\alpha+1)[\alpha(\alpha-2) - 3] = (\alpha+1)[\alpha^2 - 2\alpha - 3] = (\alpha+1)(\alpha-3)(\alpha+1) = (\alpha+1)^2(\alpha-3)$$

$$\alpha_1 = 3 \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -1$$

$$1. \quad \alpha_1 = 3 \quad X_1 = B_1 e^{3t} \quad F(\alpha) \cdot B_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -5b_1 + b_2 - 2b_3 & 0 & 0 \\ b_1 - 5b_2 + 2b_3 & 0 & 0 \\ 3b_1 - 3b_2 + 2b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-5b_1 + b_2 - 3b_3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 - 5b_2 + 2b_3 = 0 \\ 2b_1 - 3b_2 + 2b_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 2b_1 + 2b_2 = 0 \quad b_1 = -b_2 \\ b_3 = \frac{1}{2}[b_2 - 5b_1] = \frac{1}{2}(b_2 + 5b_1) = 3 \end{array}$$

$$b_1 = -1 \quad b_2 = 1 \quad b_3 = 3$$

$$\bar{x} = C_1 x_1 = \begin{pmatrix} -C_1 e^{3t} \\ C_1 e^{3t} \\ 3C_1 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \alpha_{1,2} = -1 \quad x_2 = (E + F(\alpha_2)t)A_2 e^{-t}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad F^2(\alpha_2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 8 \\ 12 & -12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$F^2(\alpha_2)A_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 8 \\ 12 & -12 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-4a_1 + 4a_2 - 8a_3 = 0 \rightarrow -a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \quad a_1 = a_2 - 2a_3$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} a_2 - 2a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} e^{-t} \quad [F(\alpha_2) \cdot A_2 = 0]$$

$$X = \begin{pmatrix} -C_1 e^{3t} \\ C_1 e^{3t} \\ 3C_1 e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2(a_2 - C_2 a_3) e^{-t} \\ C_2 a_2 e^{-t} \\ C_2 a_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 e^{3t} + C_2(a_2 - 2a_3) e^{-t} \\ C_1 e^{3t} + C_2 a_2 e^{-t} \\ 3C_1 e^{3t} + C_2 a_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X = (x, y, z)$$

$$x = -C_1 e^{3t} + (C_2 - 2C_3) e^{-t}$$

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

$$z = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

### 13.11 Розв'язки до розділу 11

Знайти загальне розв'язання для рівнянь

$$1. (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{dx}{x + 2y} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0};$$

$$dz = 0 \rightarrow z = C_1 \quad \text{Перший інтеграл}$$

$$y dx + (x + 2y) dy = 0 \rightarrow d(yx) + 2y dy = 0 \rightarrow d(yx) + d(y^2) = 0$$

$$yx + y^2 = C_2 \quad \text{Другий інтеграл}$$

$$\Phi(z, yx + y^2) = 0; \quad \text{Загальний інтеграл рівняння}$$

$$\underline{z = \varphi(yx + y^2)}; \quad \text{Загальне розв'язання}$$

$$2. (x-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{dx}{x-z} = \frac{dy}{y-z} = \frac{dz}{2z} = \frac{du}{0};$$

$$u = C_1;$$

$$\frac{d(x+z)}{x+z} = \frac{dz}{2z};$$

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = \frac{dz}{2z};$$

$$\ln(x+z) = \frac{1}{2} \ln z + \ln C_2;$$

$$(x+z)^2 = C_2 z;$$

$$(y+z)^2 = C_3 z;$$

$$\Phi\left(u, \frac{(x+z)^2}{z}, \frac{(y+z)^2}{z}\right) = 0;$$

$$u = \varphi\left[\frac{(x+z)^2}{z}, \frac{(y+z)^2}{z}\right];$$

*Загальне розв'язання*

$$3. e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$$

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x};$$

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2} \rightarrow -e^{-x} + \frac{1}{y} = C_1; \quad \text{Перший інтеграл}$$

$$-\frac{1}{e^x} + \frac{1}{y} = C_1 \rightarrow C_1 = \frac{-y + e^x}{e^x \cdot y} \rightarrow C_1 e^x y = -y + e^x \rightarrow$$

$$e^x (C_1 \cdot y - 1) = -y \quad \text{отримуємо : } e^x = \frac{y}{1 - C_1 y};$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{e^x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz(1-C_1y)}{y} \rightarrow \frac{dy}{1-C_1y} = dz \rightarrow$$

$$\frac{dy}{C_1\left(\frac{1}{C_1} - y\right)} = dz \rightarrow dz = \frac{-du}{C_1u}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{C_1} - y = u \\ \frac{1}{C_1} - u = y \\ dy = -du \end{array} \right|$$

$$z = -\frac{1}{C_1} \cdot \ln u + C_2;$$

$$z = -\frac{1}{C_1} \cdot \ln\left(\frac{1}{C_1} - y\right) + C_2;$$

$$z + \frac{1}{C_1} \cdot \ln\left(\frac{1-C_1y}{C_1}\right) = C_2;$$

$$z + \frac{1}{y^{-1} - e^{-x}} \cdot \ln\left(\frac{1 - [1 - ye^{-x}]}{C_1}\right) = z + \frac{1}{y^{-1} - e^{-x}} \cdot \ln \frac{y \cdot e^{-x}}{C_1} = C_2;$$

$$z - \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} = C_2;$$

$$\Phi\left(\frac{1}{y} - e^x, \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} - z\right) = 0; \text{ Загальний інтеграл}$$

$$z = \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} + \varphi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right); \text{ Загальне розв'язання}$$

$$4. (y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u};$$

$$\frac{d(x-y)}{y-x} = \frac{du}{u};$$

$$\frac{d(x-z)}{z-x} = \frac{du}{u};$$

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{du}{u};$$

$$\ln u = -\ln(x-y) + \ln C_1;$$

$$u(x-y) = C_1;$$

$$u(x-z) = C_2;$$

$$\frac{x+y+z}{u^2} = C_3;$$

$$\Phi\left[u(x-y), u(x-z), \frac{x+y+z}{u^2}\right] = 0. \quad \text{Загальний інтеграл}$$

5. Знайти розв'язання рівнянь, які задовольняють умовам.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u = yz \quad \text{при} \quad x = 1$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2};$$

$$\begin{aligned} x-y &= C_1; \\ 2x-2 &= C_2; \end{aligned} \quad \rightarrow \quad u = \varphi(x-y, 2x-z)$$

$$yz = \varphi(1-y, 2-z);$$

$$1-y = \xi;$$

$$2-z = \eta;$$

$$\varphi(\xi, \eta) = (1-\xi)(2-\eta);$$

$$u = (1-x+y)(2-2x+z).$$

